10 VEKTOREN

W 10.01 Was versteht man unter der Menge $\mathbb{R}^2$?

W 10.02 Was versteht man unter einem Vektor aus $\mathbb{R}^2$?

W 10.03 Unter welchen Voraussetzungen sind zwei Elemente aus $\mathbb{R}^2$ einander gleich?

W 10.04 Wie ist die Summe zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ definiert?

W 10.05 Wie ist das Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ definiert?

W 10.06 Wie kann man die Differenz zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ durch eine Summe darstellen?

W 10.07 Was versteht man unter dem Nullvektor $O \in \mathbb{R}^2$?

W 10.08 Sei $A \in \mathbb{R}^2$. Was versteht man unter dem Vektor $-A$?

W 10.09 Warum kann man mit Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ weitgehend analog rechnen wie mit reellen Zahlen? Gibt es auch Unterschiede?

W 10.10 Gib einige Rechengesetze für die Addition von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ an und erläutere diese!

W 10.11 Gib einige Rechengesetze für die Multiplikation von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ mit reellen Zahlen an!

W 10.12 Was ist der Unterschied zwischen einem Vektor in $\mathbb{R}^2$ und einem Skalar?

W 10.13 Was versteht man unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^2$? Warum darf man von einem „Produkt“ sprechen? Warum nennt man es „Skalarprodukt“?

W 10.14 Gib einige Rechengesetze für das Skalarprodukt $A \cdot B$ von Vektoren an!

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2017. | www.oebv.at | | Mathemarik verstehen 5 SB | ISBN: 978-3-209-09569-5
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

W 10.01 Die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$.

W 10.02 Ein geordnetes Zahlenpaar $(a_1 \mid a_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet man als Vektor in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten a_1 und a_2.

W 10.03 Für zwei Vektoren $(a_1 \mid a_2)$ und $(b_1 \mid b_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ gilt: $(a_1 \mid a_2) = (b_1 \mid b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$

W 10.04 Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Man setzt: $A + B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$.

W 10.05 Es sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$. Man setzt: $r \cdot A = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

W 10.06 $A - B = A + (-1) \cdot B$

W 10.07 Der Vektor $O = (0 \mid 0)$ heißt Nullvektor in $\mathbb{R}^2$.

W 10.08 Ist $A = (a_1 \mid a_2)$, dann heißt der Vektor $-A = (-a_1 \mid -a_2)$ Gegenvektor von A oder inverser Vektor zu A.

W 10.09 Es gelten analoge Rechengesetze. Einen Unterschied gibt es allerdings: Vektoren können nicht dividiert werden.

W 10.10 Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gilt:

(1) $A + B = B + A$	(Kommutativgesetz der Addition)
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$	(Assoziativgesetz der Addition)
(3) $A + O = A$	(Gesetz vom neutralen Element)
(4) $A + (-A) = O$	(Gesetz von den inversen Elementen)

W 10.11 Für alle $A, B \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$	(Distributivgesetz 1)
(2) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$	(Distributivgesetz 2)
(3) $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$	(Quasiassoziativgesetz)
(4) $1 \cdot A = A$	(Gesetz vom neutralen Element)

W 10.12 Ein Vektor ist ein geordnetes Zahlenpaar, ein Skalar ist eine reelle Zahl.

W 10.13 Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$. Die reelle Zahl $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ ist das Skalarprodukt der Vektoren A und B.

Man darf von einem Produkt sprechen, weil es eine Verallgemeinerung des Produkts reeller Zahlen ist und teilweise die gleichen Rechengesetze gelten. Es heißt Skalarprodukt, weil das Ergebnis ein Skalar ist.

W 10.14 Es gelten ua. die folgenden Rechengesetze:

Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

(SP 1) $A \cdot B = B \cdot A$	(Kommutativgesetz)
(SP 2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	(Distributivgesetz)
(SP 3) $(r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B)$	(Quasiassoziativgesetz)

Für alle $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
(2) $A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$
(3) $(r \cdot A) \cdot B = A \cdot (r \cdot B) = r \cdot (A \cdot B)$
(4) $(r \cdot A) \cdot (s \cdot B) = (r \cdot s) \cdot (A \cdot B)$
(5) $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot (A \cdot B) + B^2$
(6) $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot (A \cdot B) + B^2$

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2017. | www.oebv.at | | Mathemarik verstehen 5 SB | ISBN: 978-3-209-09569-5
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.