Mathematik verstehen 1

Ein neuer Anfang

Das nicht nummerierte Einstiegskapitel steht außerhalb des Lehrstoffs und bietet den Lernenden die Möglichkeit, bereits in der Volksschule Gelerntes einerseits zu wiederholen und andererseits dies in eine neue Umgebung (neue Schule, neue Klassenkameraden, ...) so einzubauen, dass möglichst schnell durch gemeinsame Bearbeitung einiger Aufgaben Vertrautheit einkehren soll. Die Lernenden kommen schon in diesem Kapitel mit vielfältigen Aufgabenformaten in Berührung, die sie in weiterer Folge begleiten werden, zB Aufgaben zum Ausfüllen, Multiple-Choice-Aufgaben, Textaufgaben, einfache Rechenaufgaben, Lückentexte, Zuordnungsaufgaben etc. Am Ende dieses Kapitels und gleichzeitig als Übergang zum ersten Lernkapitel stellt sich die Frage „Was ist Mathematik?“ – eine erste Begegnung mit einer Sonderseite, die in den weiteren Kapiteln unter „MERKWürdiges“ zu finden sein wird.

Die weiteren Kapitel sind durchnummeriert. Die Aufgabennummern sind so konzipiert, dass die jeweilige Kapitelnummer vor dem Punkt erkennbar ist, zB im Kapitel 1 Aufgaben wie 1.72, im Kapitel 2 Aufgaben wie 2.46 usw. Dies hat den Vorteil der besseren Orientierung und Zuordnung im Lehrbuch bereits anhand der Aufgabennummern und im Unterricht beim Angeben von Schul- und vor allem Hausübungsaufgaben.

1 Natürliche Zahlen

Der Begriff der Zahl steht im Mittelpunkt des ersten Lernkapitels. Viele Grundbegriffe werden aufgearbeitet, die zum Verständnis der natürlichen Zahlen beitragen. Dazu werden Vorstellungen entwickelt, mit Hilfe derer Vorgänger und Nachfolger einer natürlichen Zahl ermittelt werden können. Mit geraden und ungeraden Zahlen und den Vielfachen einer natürlichen Zahl wird der erste wesentliche Schritt in Richtung Zusammenfassen von Elementen mit bestimmten Eigenschaften gegangen, der in einer Definition des mathematischen Mengenbegriffs gipfelt. Nicht zu unterschätzen ist die Vielfalt der Verwendung natürlicher Zahlen, bei der zwischen Ordinalzahlen und Kardinalzahlen – ein im Alltag latentes Problem, vor allem in sprachlicher Hinsicht – deutlich unterschieden wird.

Einen weiteren Schwerpunkt dieses Kapitels stellen die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen dar. Hierbei wird der Unterschied zwischen Ziffer und Zahl prägnant hervorgehoben. Um dies zu verdeutlichen, stehen die römischen Zahlzeichen am Anfang dieses Abschnitts. Eine Grundvorstellung zur Darstellung von Zahlen ist die Bündelung, die bereits im römischen Zahlensystem praktiziert wurde und im dekadischen Zahlensystem eine ähnliche Fortsetzung findet. Es ist wichtig, dass die Lernenden schon jetzt erkennen, worin die Vorteile des dekadischen Zahlensystems liegen, bevor mit natürlichen Zahlen ausgiebig gerechnet wird.

Auf der Grundvorstellung von Vorgänger und Nachfolger einer natürlichen Zahl baut der Abschnitt des Ordnen von Zahlen auf. Die Begriffe „Kleiner-Kette“ und „Größer-Kette“ spielen in vielen weiteren Kapiteln eine große Rolle.

Der Zahlenstrahl wird eingeführt, damit die Ordnung auch eine grafische Veranschaulichung erhält. Hierbei kann man feststellen, dass der Zahlenstrahl nach rechts keinen Pfeil aufweist. Dies hat mehrere Gründe, die teilweise erst später deutlich zum Ausdruck kommen:

- Es handelt sich um einen Strahl, der einen Anfangspunkt 0, aber keinen Endpunkt hat. Dies wird durch Punkte gekennzeichnet, die eine unendliche Verlängerung andeuten.
- Die Ordnung der Zahlen, dass diese nach rechts hin größer werden, ist per definitionem festgelegt, es bedarf daher keiner weiteren Erklärung hierfür.
- Die Pfeilspitze (meist im Unterricht so „ $\rightarrow$ “ gezeichnet) stellt das Kleiner-Zeichen „ $<$ “ auf den Kopf. Damit ist die Ordnung der Zahlen aus Sicht mancher Lernender auf einmal widersprüchlich, da die Spitze nach rechts zeigt, obwohl dort ja die kleinere von zwei Zahlen liegen sollte.

Dem entsprechend werden in späteren Kapiteln auch die beiden Achsen des Koordinatensystems nicht mit Pfeilen versehen.

Ein weiterer wesentlicher Punkt für Lernende ist die Tatsache, dass Zahlen nicht nur durch Ziffern und Zeichen,

sondern eben auch durch Punkte dargestellt werden können. Somit markiert man keine Zahlen auf dem Zahlenstrahl, man stellt sie vielmehr als Punkte (oder Kreuze) dar und so entspricht jeder (natürlichen) Zahl ein Punkt auf dem Zahlenstrahl.

Zum kritischen Umgang mit natürlichen Zahlen gehört auch das sinnvolle Runden. Auch hierzu finden sich neben klassischen Lern- und Übungsaufgaben auch solche, bei denen über die Rundungsregeln aufmerksam nachgedacht werden kann.

2 Mit natürlichen Zahlen rechnen

Bei den Rechenoperationen wird zum Entwickeln von Grundvorstellungen verstärkt auf Veranschaulichungen zurückgegriffen. Sowohl beim Addieren als auch beim Subtrahieren dienen drei Darstellungen, die jeweils in verschiedenen Kontexten als Visualisierung herangezogen werden können (siehe Aufgabe 2.21), dem besseren Verständnis:

- Die Streckendarstellung kann in erster Linie dann angeführt werden, wenn zwei Zahlen zu einer Summe zusammengefügt werden (zB Geldbeträge: Eine Hose kostet 80 €, ein Hemd kostet 50 €, insgesamt müssen 130 € gezahlt werden.).
- Die Pfeildarstellung veranschaulicht zwei hintereinander ausgeführte Veränderungen, die eine Gesamtveränderung bewirken, wobei die Ausgangszahl, von der aus diese Veränderung beginnt, nicht notwendigerweise bekannt sein muss (zB Wachstum eines Baums innerhalb eines bestimmten Zeitraums: in einem Jahr 7 cm, im nächsten Jahr 5 cm, insgesamt 12 cm).
- Der Einsatz der Punkt-Pfeil-Darstellung ist dann sinnvoll, wenn von einer Ausgangszahl aus eine Veränderung um einen bestimmten Wert stattfindet, wobei diese Veränderung zu einer neuen Ausgangszahl führen kann (zB Erhöhung der Geschwindigkeit von 100 km/h um 30 km/h auf 130 km/h).

In ähnlicher Weise können die drei Darstellungen auch bei der Subtraktion gedeutet werden (siehe Aufgabe 2.45).

Aufgaben, welche die Sprachkompetenz fördern und so den Umgang mit Vokabeln wie „vermehrten“, „vergrößern“, „vermindern“ oder „verkleinern“ trainieren, sind ebenso wichtig wie das Schätzen von Ergebnissen.

Die Bedeutung der Klammern in der Mathematik und gezielte Aufgaben dazu führen zum Kommutativgesetz und zum Assoziativgesetz. Es werden bewusst keine eingedeutschten Bezeichnungen für die beiden Gesetze verwendet, da diese Namen sowieso in späteren Lernjahren beherrscht werden müssen und so auch eine Doppelung der Bezeichnungen vermieden wird. Kurz und knapp wird der Begriff der Variable schon hier eingeführt, die detaillierte Beschäftigung damit erfolgt jedoch erst in Kapitel 6.

Auch bei der Multiplikation werden drei Visualisierungen angeboten: die Streckendarstellung, das Punktfeld und das Kombinationsdiagramm. All diese Vorstellungen bieten ein Fundament für ein besseres Verständnis für die Multiplikation an sich und darüber hinaus für spätere Themenbereiche. Bei der Division kann ein Ergebnis manchmal als Teilung oder als Messung aufgefasst werden. Auch hierzu finden sich passende Aufgaben.

Auch bei der Multiplikation werden das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz vorgestellt und anhand anschaulicher Aufgaben trainiert.

Bei der Verbindung aller vier Grundrechenarten spielen die Vorrangregeln eine große Rolle, die in dieser Lehrbuchreihe noch öfter thematisiert werden. Sie stellen neben der Verwendung von Klammern eine erste einfache Strukturierung von Rechnungen dar, die in der Folge an Bedeutung gewinnen wird. Bei den Distributivgesetzen der Multiplikation werden beide Richtungen, die Darstellung eines Produkts als Summe (Differenz) und die Darstellung einer Summe (Differenz) als Produkt, also das Herausheben, erläutert. Auch bei der Division werden diese Regeln als Gesetze bezeichnet, damit eine Gleichwertigkeit hergestellt ist und die Grundidee als fester Bestandteil in das Umformen von Termen transferiert werden kann. Die Konstanz von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten bildet den Abschluss des Kapitels vor allem im weiteren Hinblick auf das Verstehen des zuvor Erarbeiteten.

3 Zahlen in Dezimaldarstellung

Es wird zunächst auffallen, dass dieses Kapitel nicht den Titel „Dezimalzahlen“ trägt, sondern „Zahlen in Dezimaldarstellung“. Der Grund dafür ist leicht erklärt: Lernende tendieren dazu, „Dezimalzahlen“ als eine neue Gattung von Zahlen zu deuten, was zunächst nicht völlig falsch ist, da es sich hierbei nicht nur um natürliche Zahlen handelt. Dass aber beispielsweise die Zahl 3 als 3,0 geschrieben werden kann, es sich dennoch um eine natürliche Zahl handelt, könnte einen Konflikt darstellen. Noch problematischer wird es, wenn dann auch noch der Begriff „Bruchzahlen“ ins Spiel kommt, denn hier wird häufig automatisch davon ausgegangen, dass eine weitere Gattung von Zahlen auftritt. Es ist dann sehr mühsam beizubringen, dass eine Bruchzahl auch eine Dezimalzahl ist und eine Dezimalzahl häufig auch eine Bruchzahl. Dass eine natürliche Zahl aber auch eine Bruchzahl sein kann, verwirrt dann nicht selten viele Lernende. Daher wird in diesem Lehrwerk überwiegend nur von Zahlen gesprochen, die auf verschiedene Arten dargestellt werden können. Eine dieser Darstellungen ist eben die Dezimaldarstellung.

Neben einer gebräuchlichen Veranschaulichung mit Geldbeträgen und einer Vorstellung der korrekten Benennungen wird der Umgang mit dieser Darstellung anhand vieler Aufgaben in verschiedenen Formaten geübt. Der Zahlenstrahl wird für Zahlen zwischen den natürlichen Zahlen freigegeben und die Rundungsregeln werden für Nachkommaziffern erweitert. Dabei ist es wichtig, zwischen Nachkommastellen und Nachkommaziffern zu unterscheiden. ZB: Die Zahl 28,715 ist eine Zahl mit drei Nachkommastellen, 1 ist die Nachkommaziffer an der Hundertstelstelle.

Beim Addieren und Subtrahieren werden die Rechenmethoden wiederholt, die schon bei den natürlichen Zahlen angewendet worden sind, lediglich auf die entscheidende Rolle des Kommas ist zu achten. Gerade hier ist es wieder erforderlich, das richtige Schätzen eines Ergebnisses zu trainieren. So lassen sich manche Fehler vermeiden, die auf ein falsches Setzen des Kommas zurückzuführen sind.

Beim Multiplizieren ist ebenso das Komma die Neuerung des sonst gewohnten händischen Multiplizierens. Einen wichtigen Aspekt macht das Verschieben des Kommas bei Multiplikationen mit 10, 100, 1 000, ... und mit 0,1; 0,01, 0,001; ... aus. Vor allem bei der Multiplikation zweier Zahlen in Dezimaldarstellung spielen Veranschaulichungen, zB Streckendarstellungen, wieder eine entscheidende Rolle.

Beim Dividieren ist nicht nur das Komma die Neuerung beim händischen Dividieren, sondern auch die Tatsache, dass es Divisionsoperationen gibt, die keine Ende haben. Hier wird das Runden auf eine bestimmte Nachkommastelle wieder sinnvoll thematisiert. Auch beim Dividieren ist das Verschieben des Kommas bei Divisionen durch 10, 100, 1 000, ... und durch 0,1; 0,01, 0,001; ... ein essentieller Gesichtspunkt.

Eine spielerische Einführung des Taschenrechners steht am Ende des Kapitels. Da bereits fast jedes Mobiltelefon eine Taschenrechnerfunktion aufweist, erscheint eine erschöpfende Erklärung für natürliche Zahlen und Zahlen in Dezimaldarstellung müßig, eine Überprüfung wichtiger Rechenfunktionen ist jedoch bereits in der 5. Schulstufe durchaus zweckmäßig.

4 Länge, Masse, Temperatur, Zeit

Ganz wesentlich erscheint hier gleich zu Beginn, die Begriffe Maß, Maßzahl und Maßeinheit eindeutig zu definieren und diese nicht zu verwechseln. Das erleichtert in weiterer Folge nicht nur das Verstehen vieler Aufgaben, sondern auch das Formulieren korrekter Antworten.

Mit den Längenmaßen wird begonnen, wobei die Verwendung und die Umrechnungen von einer Einheit in eine andere anhand verschiedenartiger Aufgaben geübt wird. Mittels einiger Veranschaulichungen bestimmter Längenmaße wird die Vorstellung bei Lernenden geschult.

Bei den Massenmaßen wird ähnlich verfahren. Zusätzlich wird auf die oft falsche verwendete Gleichsetzung von Masse und Gewicht hingewiesen. Die Einheiten Dezigramm und Zentigramm werden zwar vorgestellt, letztlich wird diesen aber in weiterer Folge keine große Bedeutung beigemessen, da jene Einheiten im Alltag selten gebraucht werden.

Im Abschnitt Temperatur werden neben der Maßeinheit Grad Celsius der Vollständigkeit halber auch Fahrenheit und Kelvin genannt.

Den Zeitmaßen kommt eine besondere Rolle zu, da diese kein dekadisches System ergeben. Das Rechnen mit Sekunden, Minuten, Stunden, etc. stellt eine große Herausforderung für Lernende dar und kann nur durch viele Veranschaulichungen und Aspekte aus der Erlebniswelt der Lernenden gut bewältigt werden. Dabei ist auch ganz entscheidend, den Unterschied zwischen einem Zeitpunkt und einer Zeitdauer (Zeitspanne) zu erkennen. Viele Aufgaben schließen genau an diese Kriterien an.

5 Zahlen in Bruchdarstellung

Ähnlich wie im Kapitel „Zahlen in Dezimaldarstellung“ wird hier häufig auf den Begriff „Bruchzahl“ verzichtet. Bestimmte Zahlen können auf verschiedene Arten dargestellt werden (siehe Seite 133), eine davon ist die Bruchdarstellung. Neben dem Kennenlernen der korrekten Bezeichnungen der Darstellung Bruch spielen vor allem geometrische Darstellung zur besseren Visualisierung eine entscheidende Rolle. Einerseits zu erkennen, welche Zahl durch eine Strecken-, Kreis- oder Rechtecksdarstellung angegeben wird, ist zentral, andererseits selbst geometrische Darstellungen zu entwerfen und so eine Vorstellung zu entwickeln, was mit Zahlen verbunden werden kann, die Teile eines Ganzen sind. In diesem Sinn wird auch verdeutlicht, dass natürliche Zahlen und Zahlen, die größer als 1 sind, ebenso in Bruchdarstellung oder in der gemischten Form angeschrieben werden können. (Der Ausdruck „gemischte Zahl“ wird vermieden, da eine Zahl als Denkobjekt eine Einheit in sich bildet und daher nicht gemischt sein kann, nur ihre Darstellung, dh. ihre Form, kann als gemischt bezeichnet werden.) Verzichtet wird auf Bezeichnungen wie „echter Bruch“, „unechter Bruch“ und „uneigentlicher Bruch“, die bei der Entwicklung von Grundvorstellungen nicht hilfreich sind, lediglich ein Ballast an nicht notwendigen Vokabeln.

Bereits in Mathematik verstehen 1 wird thematisiert, dass der Bruchstrich als Divisionszeichen gedeutet werden kann. Damit wird angesprochen, dass eine Zahl nicht nur das Ergebnis einer Rechnung, sondern eine Rechnung selbst darstellen kann. Diese Vorstellung wird später, zB bei der Angabe von Verhältnissen, bei der Prozentrechnung etc., sehr dienlich sein.

Dem Zahlenstrahl kommt hier nicht nur die Rolle des Hilfsmittels zur Ordnung von Zahlen zu, sondern auch jene des Beglaubigers, dass es sich bei manchen Darstellungen, zB $0,5$ und $\frac{1}{2}$, um dieselben Zahlen handelt, da sie ein und demselben Punkt auf dem Zahlenstrahl entsprechen.

Das Addieren und Subtrahieren wird genauso wie das Multiplizieren und das Dividieren nur anhand einfacher Aufgaben und Veranschaulichungen gezeigt, erlernt und geübt. Bewusst wird in Mathematik verstehen 1 auf Rechenregeln verzichtet, die für das Herausbilden von Vorstellungen häufig hinderlich sind. Bei der Multiplikation wird einerseits auf die Deutung der verkürzten Addition hingewiesen, die bereits bei den natürlichen Zahlen und den Zahlen in Dezimaldarstellung zur Anwendung gekommen ist, andererseits auf die Von-Deutung, die noch zB bei der Prozentrechnung einen entscheidenden Part einnehmen wird. Bei der Division wird vor allem auf die Vorstellung „Wie oft ist die eine Zahl in der anderen Zahl enthalten?“ gesetzt. Damit lassen sich einfache Aufgaben ohne Rechenregeln bearbeiten.

6 Mit Variablen arbeiten

In diesem Kapitel wird versucht, wichtige Aspekte des Variablenbegriffs schrittweise einzuführen. Im Kapitel 2 wurde zwar eine Variable bereits als Leerstelle bekanntgemacht, damit Rechengesetze allgemein formuliert werden können. Damit hat man den Variablenbegriff zweckmäßig unter dem Vorwand eingeführt, dass in diese Leerstellen Zahlen eingesetzt werden können. Das Spektrum wurde dadurch noch lang nicht ausgeschöpft.

Daher steht am Anfang des Kapitels der Gegenstandsaspekt der Variablen im Vordergrund. Dieser betrachtet Variablen als unbestimmte bzw. unbekannte Zahlen, die auf verschiedene Arten dargestellt werden können. In dieser inhaltlichen Definition dienen die Veranschaulichungen dazu, einen Bezug zu Variablen und zu einfachen Rechenoperationen damit herzustellen. Erst dann kommt der Einsetzungsaspekt zur Sprache, in dem Variablen als Platzhalter für Zahlen dienen.

Der Gegenstandsaspekt und der Einsetzungsaspekt werden in der Folge auf Terme und Gleichungen übertragen.

Auch hier kann ein Term als unbestimmte Zahl aufgefasst werden, ebenso kann für eine Variable in einem Term eine konkrete Zahl eingesetzt werden. Bei Gleichungen, die zumeist in der Streckendarstellung veranschaulicht sind, ist die Aussage der Gleichung selbst mit dem Gegenstandsaspekt zu deuten. Setzt man eine Zahl ein, kann die Aussageform als wahr oder falsch bezeichnet werden.

In Mathematik verstehen 1 wird ein weiterer Aspekt, der Kalkülaspekt, in dem Variablen als inhaltsleere Objekte angesehen werden, mit denen regelkonform Operationen durchgeführt werden, bewusst kaum angeschnitten. Gleichungsumformungen nur nach bestimmten Regeln können nämlich bei zu überhasteter Einführung die behutsam erarbeiteten Vorstellungen von Variablen und Termen insofern zerstören, dass häufig nur noch gelernte Regeln ohne nachzudenken angewendet werden und teilweise unter Missachtung von Gleichungsstrukturen nicht mehr berücksichtigt wird, welche Aussage beim Umformen entsteht.

Der Abschnitt über Ungleichungen fungiert vor allem dazu, die Symbole „ $\leq$ “ und „ $\geq$ “ einzuführen und die Begriffe „mindestens“ und „höchstens“ damit in Zusammenhang zu bringen. Die Aufgaben hierzu sind vor allem den Handlungsbereichen Darstellen und Interpretieren zugeordnet.

Im Abschnitt zur direkten Proportionalität wird mittels anschaulicher Themen eine einfache Form der Zuordnung entwickelt. Der Einsatz von Variablen ist sparsam, aber mit Bedacht gewählt, da bereits dadurch in der 5. Schulstufe funktionale Zusammenhänge zum Ausdruck gebracht werden können. In den Musteraufgaben 6.71 und 6.78 wird darauf geachtet, dass im Hinblick auf direkte Proportionalitätsfunktionen der Form $f(x) = k \cdot x$ die Variable n als zweiter Faktor angeschrieben wird, was in weiterer Folge für die Lernenden so beibehalten werden kann. Auch die einfach gehaltenen Diagramme stellen einen intuitiven Konnex zu funktionalen Abhängigkeiten dar.

7 Einführung in die Geometrie

Das Lehrwerk führt in die Geometrie über die wichtigsten Grundbegriffe ein. Hierbei wird ein kritischer Blick auf die Modellhaftigkeit geometrischer Darstellungen wie Strecken, Geraden, Strahlen, Punkte etc. geworfen, der den Lernenden anhand geeigneter Aufgaben vermittelt werden soll. Deutlich wird zwischen einer Strecke und der Länge einer Strecke unterschieden.

Das Geodreieck als notwendiges Werkzeug kommt in der Folge in verschiedenen Belangen zum Einsatz. Für den Unterricht ist es unbedingt erforderlich, dass die Lernenden ein solches besitzen und das Zeichnen mit einem gespitzten Bleistift oder Druckbleistift trainieren. Dies ist eine Grundvoraussetzung für alle weiteren Arbeiten (Skizzen, Konstruktionen).

Die Begriffe parallel und normal werden anschaulich dargebracht, sollen aber ebenso kritisch beleuchtet werden. Auffallen wird in diesem Zusammenhang vielleicht, dass Geraden nicht „aufeinander“, sondern „zueinander“ normal sind, da diese Formulierung sowohl in der Ebene als auch im Raum passend erscheint, während „aufeinander normal“ letztlich nur in der räumlichen Geometrie einigermaßen angemessen wäre. Damit wird eine weitere Herausforderung in Angriff genommen: die gegenseitige Lage von Geraden in der Ebene. Die drei besprochenen Möglichkeiten können selbstverständlich nur ansatzweise mit Vorstellungen versehen werden, da es schier unmöglich erscheint, Lernenden in der 5. Schulstufe das Wesen einer Geraden, dh. einer Punktmenge, in der ebenen Geometrie zu verdeutlichen. Letztlich ist die Kenntnis dieser Lagebeziehungen aber fundamental, da sie in vielen weiteren mathematischen Zusammenhängen (geometrische Deutung von Gleichungssystemen in zwei Variablen, Vektorrechnung, Funktionenlehre, ...) die Substanz von Erkenntnissen bietet. In der Geometrie des Raums (Kapitel 11) werden diese Lagebeziehungen erweitert.

Die Definition eines Winkels und die Arten von Winkeln werden ebenso anschaulich vermittelt wie das Messen von Winkeln. Es sei darauf hingewiesen, dass deutlich zwischen den Begriffen Winkel und Winkelmaß (Maß eines Winkels) unterschieden wird: Während ein Winkel aus zwei Strahlen mit einem gemeinsamen Anfangspunkt besteht, ist das Winkelmaß eine Zahl, die in der Einheit Grad angegeben wird.

Im Abschnitt „Symmetrie“ wird neben der Achsensymmetrie auch die Punktsymmetrie behandelt. Aufgaben aus dem Handlungsbereich Interpretieren sind hier besonders wesentlich.

8 Kreis und Kreisteile

Ausgangspunkt für die Beschäftigung mit dem Kreis ist die intuitive Vorstellung, dass alle Punkte, die von einem fixen Punkt gleich weit entfernt sind, auf einer Kreislinie liegen. Dies lässt sich auf mehrere Arten veranschaulichen, zwei Möglichkeiten werden in den beiden Einstiegsaufgaben angeboten. Neben den wichtigsten Bezeichnungen wird der Zirkel als wesentliches Utensil eingeführt. Dabei wird bereits in einer Musteraufgabe der richtige Umgang mit diesem Werkzeug beschrieben. Für Konstruktionen ist die Kenntnis der Längenmaße bei Radius, Durchmesser etc. erforderlich.

Dass recht deutlich zwischen Kreis und Kreislinie unterschieden wird, hat zwei Gründe:

- Die Bezeichnung „Kreis“ ist nicht eindeutig, es kommt häufig auf den Zusammenhang an, ob eine Kreislinie oder eine Kreisfläche damit gemeint ist.
- Da erst in der 8. Schulstufe Berechnungen am Kreis durchgeführt werden, kann die Unterscheidung zwischen Linie und Fläche nicht aufgrund passender Aufgaben erarbeitet werden. Somit muss in der Nennung Präzision vorherrschen.

Weiters wird auffallen, dass vor allem bei den Lagebeziehungen zwischen Kreis und Geraden die Bezeichnungen „Kreissekante“, „Kreistangente“ und „Kreisspassante“ Verwendung finden und nicht bloß „Sekante“, „Tangente“ und „Passante“. Dies liegt darin begründet, dass Grundvorstellungen längerfristig erhalten bleiben sollen und nicht irgendwann gänzlich verworfen werden müssen. So gilt für eine Kreistangente stets, dass sie mit der Kreislinie genau einen Punkt gemeinsam hat bzw. diese in einem Punkt berührt. Dies muss für eine Tangente an den Graphen einer Funktion nicht gelten, da die Tangente zwar den Graphen in einem Punkt berührt, den Graphen jedoch an einer anderen Stelle oder an mehreren anderen Stellen schneiden oder abermals berühren kann. Die Grundvorstellung, dass eine Tangente mit einem anderen Objekt stets nur einen Punkt gemeinsam hat, müsste verworfen werden. Dies wird mit dem Begriff „Kreistangente“ vermieden, da hier wirklich Gerade und Kreislinie stets nur einen Punkt gemeinsam haben. Ähnliches gilt für die Begriffe Sekante und Passante.

Die Tatsache, dass gezielt zwischen Kreislinie und Kreisfläche getrennt wird, zeigt sich auch im Aufbau des Kapitels: Der Abschnitt zur Fläche und zu Flächenteilen des Kreises wird gesondert von den übrigen behandelt. Auch hier wird vermieden, eingedeutschte Begriffe für Kreissegment und Kreissektor zu verwenden, da die Fachbegriffe letztlich doch einmal gelernt werden müssen und man sich dadurch erspart zwei Begriffe für einen bestimmten Flächenteil lernen zu müssen.

9 Rechteck und Quadrat

Neben den genauen Definitionen von Rechteck und Quadrat, dem Erkennen anhand alltäglicher Gegenstände und dem Konstruieren mit Hilfe des Geodreiecks und eines gespitzten Bleistifts wird in diesem Kapitel auch gerechnet.

Für den Umfang eines Rechtecks (Quadrats) ist die Kenntnis von Variablen – wenigstens in der Form, wie sie in Kapitel 2 ausgeführt wird – notwendig, damit die Formeln erkannt und sinnvoll eingesetzt werden können. Zudem werden die Längenmaße nicht nur für das Konstruieren benötigt, sondern eben auch für Berechnungen.

Für den Flächeninhalt von Rechtecken (Quadraten) werden Vorstellungen entwickelt, welche die Sinnhaftigkeit von Flächenmaßen verdeutlichen. Ganz wesentlich ist dann aber auch das Vorstellen von Flächenmaßeinheiten und das Erlernen des Umrechnens von einer Einheit in eine andere. Dabei helfen wieder Tabellen und Veranschaulichungen. Auch hier werden die Lernenden durch Anwendungen aus dem Alltag zu den Flächeninhaltsformeln für Rechteck und Quadrat hingeführt.

Am Ende des Kapitels wird noch ein Schritt weiter geführt, indem Umfang und Flächeninhalt von aus Rechtecken zusammengesetzten Figuren ermittelt werden sollen. Hierbei steht das Erkennen von geometrischen Gegebenheiten im Vordergrund, das bei weiteren Themenbereichen eine entscheidende Rolle einnehmen wird.

10 Der Maßstab

Dieses Kapitel ist in zwei unterschiedlich umfangreiche Abschnitte gegliedert. Der erste hat den Verkleinerungsmaßstab zum Thema. Anhand einer Einführungsaufgabe soll mithilfe eines Stadtplanausschnitts die Notwendigkeit des Maßstabs in alltäglichen Anwendungen verdeutlicht werden. Dabei ist es wichtig, die Bedeutung des Maßstabs durch korrektes Interpretieren des Verhältnisses zu erkennen. Hauptaugenmerk liegt auf der jeweils verwendeten Maßstabszahl, wie auch die Vergleiche Plan – Wirklichkeit darlegen. In den anschließenden Musteraufgaben ist für die Lernenden die Herangehensweise an eine Aufgabe, in der eine Länge im Plan vorliegt und die Länge in der Wirklichkeit ermittelt werden soll, schrittweise und detailliert ausgeführt. Diese Kenntnisse können in den nachfolgenden Aufgaben gefestigt und geübt werden. Als fundamental ist die Aufgabe 10.04 zu bezeichnen, in der lediglich Längenmaße in einer adäquaten Form angegeben werden sollen, die jedoch eine bedeutsame Vorübung für die danach folgenden Aufgaben darstellt.

Auch der Maßstabsleiste, die in vielen Landkarten zu finden ist, wird eine Rubrik gewidmet. In jenem Abschnitt, der sich mit der umgekehrten Sichtweise, nämlich von der Wirklichkeit in den Plan, beschäftigt, spielt die Bedeutung der Maßstabszahl ebenso eine gewichtige Rolle – ihr ist sogar ein Theoriekasten zugeeignet, der einen wesentlichen Hinweis zum Verständnis liefern soll. Anhand einer bearbeiteten Musteraufgabe wird wieder genau gezeigt, welche Vorgehensweise beim Lösen der folgenden Aufgaben angewendet werden kann. In einer weiteren Musteraufgabe wird gezeigt, wie der passende Maßstab ermittelt werden kann. Dazu folgen wieder einige Aufgaben.

Der zweite Abschnitt des Kapitels zum Vergrößerungsmaßstab ist recht kurz gehalten, da dieser in manchen Bereichen des Mikrokosmos zwar seine Geltung hat, im Alltag jedoch keinen großen Stellenwert innehat. Und doch möge diese Rubrik nicht einfach weggelassen werden, da der Vergrößerungsmaßstab gerade in naturwissenschaftlichen Forschungsgebieten ein unentbehrliches Hilfsmittel ist und die Kenntnis dessen elementar erscheint.

11 Quader und Würfel

Mit diesem Kapitel begibt man sich nun von der Ebene in die Geometrie des Raums. Dazu ist die Vorkenntnis essentiell, dass zwischen Figuren in der Ebene und Körpern im Raum unterschieden werden muss. Zu diesem Zweck werden neben Quader und Würfel auch bereits andere mehr oder weniger bekannte geometrische Körper vorgeführt, die jene Grundvorstellung des Körpers im Raum unterstützen sollen. Auf spielerische Art und Weise werden die Lernenden in den folgenden Aufgaben mit den Eigenschaften der räumlichen Geometrie vertraut gemacht, die dann für Quader und Würfel klar definiert werden. In der räumlichen Geometrie müssen die Lagebeziehungen von Geraden erweitert werden. Die Tatsache, dass Geraden im Raum auch zueinander windschief liegen können, ist ein Ausbau der bereits entwickelten Grundvorstellungen, welchen die zusätzliche Dimension mit sich bringt. Diese Kenntnis ist notwendig, wenn über die Lagebeziehung der Kanten bei Quader und Würfel reflektiert wird.

Da bei geometrischen Körpern eine zweidimensionale Abbildung nicht so einfach zu kreieren ist, werden die beiden Möglichkeiten des Schrägrisses und des Netzes detailliert vorgestellt und anhand von Musteraufgaben vorgeführt. Dabei sollen die Lernenden die Fertigkeit erlernen, dreidimensionale Gebilde mit optimalem räumlichen Eindruck zu Papier zu bringen. Diese Kompetenz wird in weiterer Folge immer wieder für Skizzen notwendig sein, die als Vorlagen für Berechnungen dienen können. Die zweite Möglichkeit einer zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensionalen Körpers ist das Netz. Im Anhang des Lehrbuchs sind Bastelbögen zu finden, anhand derer ein Quader und ein Würfel hergestellt werden können. Aufgaben wie 11.29 bis 11.34 schulen diese Fähigkeit, eine Verbindung zwischen dem Netz und dem tatsächlichen geometrischen Körper herzustellen.

Da in diesem Kapitel das Dreidimensionale im Vordergrund steht, beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit dem Volumen von Quader und Würfel. Für den Rauminhalt werden Vorstellungen entwickelt, welche die Sinnhaftigkeit von Raummaßen verdeutlichen. Wie bei den Flächenmaßen ist das Vorstellen von Raummaßeinheiten und das Erlernen des Umrechnens von einer Einheit in eine andere von großer Wichtigkeit. Dabei helfen wieder eine Tabelle und Veranschaulichungen. Anwendungen aus dem Alltag sind dabei behilflich, Vorstellungen von Volumina zu entwickeln. Zusätzlich zu den Raummaßeinheiten werden auch die Hohlmaßeinheiten thematisiert und den Lernenden durch anschauliche Aufgaben näher gebracht. Beim Umrechnen von einer Einheit in eine andere hilft

wieder eine Tabelle. Umkehraufgaben und Aufgaben zum Berechnen des Volumens zusammengesetzter Körper beschließen diesen Abschnitt.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zum Oberflächeninhalt von Quader und Würfel greift gleich auf mehrere Vorkenntnisse zurück: auf die Flächenmaße, auf die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechteck und Quadrat sowie auf das Netz eines Körpers. Wesentlich ist in diesem Abschnitt, die Unterschiede zwischen Fläche und Raum herauszuarbeiten, was in den ersten Aufgaben auch gefordert und gefördert wird. Unverzichtbar ist es in diesem Abschnitt auch, deutlich den Unterschied zwischen der Oberfläche, dh. der Gesamtheit aller Flächen eines Quaders (Würfels), und dem Oberflächeninhalt, einem Maß bestehend aus Maßzahl und Maßeinheit, nachdrücklich zu betonen. Aufgaben zum Berechnen des Oberflächeninhalts zusammengesetzter Körper runden diesen Abschnitt ab.

12 Datenmengen

Laut Lehrplan sollen Lernende der 5. Schulstufe Tabellen und grafische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen heranziehen können. Genau dies wird im letzten Lernkapitel von Mathematik verstehen 1 auch praktiziert.

Eine Vielzahl von Möglichkeiten wird präsentiert, wie man Daten darstellen kann; hier werden neben verschiedenen Listen, Tabellen, Säulen- und Balkendiagramme vorgestellt. Vieles davon kennen die Lernenden bereits, daher sind die ersten Aufgaben dem Darstellen und Interpretieren solcher Gegebenheiten gewidmet. Vor allem das Wechseln zwischen den einzelnen Darstellungstypen wird trainiert und gefördert.

Daten können nicht nur tabellarisch und grafisch erfasst, sondern auch durch Auswertungen vereinfacht werden. Zu diesem Zweck wird das arithmetische Mittel als elementare statistische Kenngröße anhand einer Musteraufgabe vorgestellt und in mehreren anwendungsorientierten Aufgaben geübt und gefestigt. In diesem Zusammenhang werden auch die Begriffe Maximum und Minimum eingeführt, die in weiterer Folge noch an Bedeutung gewinnen werden.