Herausfordernde Aufgaben zu Pyramide, S. 207

1. Bei einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sind Grundkante und Höhe gleich groß (also $a = h$). Drücke die Seitenkante, die Oberfläche und das Volumen dieser Pyramide durch a aus.

2. Bei einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sind einige Maße bekannt. Berechne die fehlenden Maße!

a. $a = 5\ cm,\ V = 50\ cm^3$

b. $h = 4\ m, V = 108\ m^3$

c. $h = 12\ cm,\ s = 17\ cm$

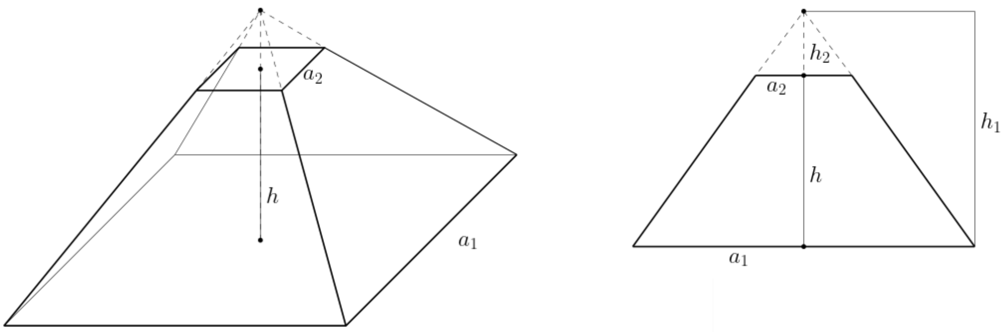
3. Von einem regelmäßigen Oktaeder kennt man die Oberfläche bzw. das Volumen. Berechne die andere Größe! (vgl. mit Schulbuch Aufgabe 915)

a. O = 110 cm^2
b. V = 355 cm^2
c. O = 24, 5 m^2
d. V = 1,0 l

4. Manche Teebeutel haben die Form eines regelmäßigen Tetraeders, d.h. einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, deren Seitenkanten so groß sind wie die Grundkante. Berechne das Volumen eines solchen Teebeutels, wenn die Länge der Grundkante $a = 5\ cm$ beträgt! (vgl. Schulbuch Aufgabe 919)
Der Teebeutel ist zu 60% mit Tee gefüllt. Berechne, wie viel Gramm Tee in einem Beutel sind, wenn die Dichte von Tee $\varrho = 0{,}3\ g/cm^3$ beträgt!

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2025. | www.oebv.at | Das ist Mathematik SB + E-Book+ 4 | ISBN: 978-3-209-12274-9
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

5. Ein Pyramidenstumpf entsteht, wenn man bei einer Pyramide parallel zur Grundfläche eine kleinere, zur ursprünglichen Pyramide ähnlichen Pyramide abschneidet (siehe Skizze links).



Wir wollen das Volumen für einen regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf herleiten, wobei das Grundquadrat Seitenlänge a_1 hat, das obere Quadrat Seitenlänge a_2 hat und der Pyramidenstumpf die Höhe h hat.

a. In der Skizze rechts ist ein Querschnitt eines Pyramidenstumpfs eingezeichnet. Begründe, warum folgende Formeln gelten:
I) $a_1 : h_1 = a_2 : h_2$ II) $h = h_1 - h_2$

b. Drücke mithilfe von Gleichung II) h_2 durch h und h_1 aus und setze in Gleichung I) ein. Berechne nun h_1(durch a_1, a_2 und h) ausgedrückt).

c. Berechne auf ähnliche Weise h_2.

d. Das Volumen V des Pyramidenstumpfs ist das Volumen V_1 der ursprünglichen Pyramide minus des Volumens V_2 der kleinen, abgeschnittenen Pyramide. Berechne diese beiden Volumina. Verwende dazu die bereits bekannten Ausdrücke für h_1 und h_2.

e. Jetzt können wir $V = V_1 - V_2$ berechnen. Verwende die binomischen Formeln, um diesen Ausdruck zu vereinfachen.

6. Nicht nur die Ägypter, sondern auch die Maya nutzten Pyramiden für ihre heiligen Bauten. Im Gegensatz zu den Ägyptern verwendeten die Maya aber

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2025. | www.oebv.at | Das ist Mathematik SB + E-Book+ 4 | ISBN: 978-3-209-12274-9
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.

Pyramidenstümpfe, die Unterbauten für ihre Tempel waren.
Einer der berühmtesten davon ist die Pyramide von Kukulcán. Ihre untere Seitenlänge beträgt $a_1 = 55\ m$, ihre obere Seitenlänge $a_2 = 10{,}4\ m$ und ihre Höhe $h = 24m$. Ein Pyramidenstumpf hat das Volumen $V = \frac{h(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)}{3}$. Verwende diese Formel, um das Volumen der Pyramide von Kukulcán zu berechnen.

7. Von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide sind zwei der Größen a, h, h_1, s, O, V gegeben. Berechne die fehlenden Größen! (vlg. Schulbuch Aufgabe 913)

a. a = 5,0 cm, s = 13 cm
b. h = 4,2 cm, V = 908 cm^3
c. a = 3,5 cm, O= 180 cm^2

Lösungen

1. $V = \frac{a^3}{3}, s = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, O = a^2(\sqrt{5}+1)$

2. a. $h = 6\ cm, h_1 = 6{,}5\ cm, O = 90\ cm^2, s \approx 6{,}96$ cm
b. $a = 9\ m, h_1 \approx 6{,}02\ m, O \approx 189{,}37\ m^2, s \approx 7{,}52\ m$
c. $a \approx 17{,}03\ cm, V = 1160\ cm^3, h_1 \approx 14{,}71\ cm, O \approx 791{,}14\ cm^2$

3. a. V ≈ 84,4 cm3 (84,35…) b. O ≈ 287 cm2 (286,7…)
c. V ≈ 8,87 m3 (8,866…) d. O ≈ 572 cm2 (571,9…)

4. $\approx 2{,}65\ g$ Tee

5. a. I) Strahlensatz, II) Zerlegung von h_1 in die zwei Teilstrecken h und h_2.
b. $h_1 = \frac{a_1 \cdot h}{(a_1-a_2)}$ c. $h_2 = \frac{a_2 \cdot h}{(a_1-a_2)}$
d. $V_1 = \frac{a_1^3 \cdot h}{3(a_1-a_2)}$ und $V_2 = \frac{a_2^3 \cdot h}{3(a_1-a_2)}$ e. $V = \frac{(a_1^3-a_2^3)\cdot h}{3(a_1-a_2)} = \frac{(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)h}{3}$

6. $V = 29641{,}28\ m^3$

7.
a. h = 12 cm, h_1 ≈ 12,8 cm, O ≈ 256 cm^2, V ≈ 260 cm^3
b. a ≈ 15,8 dm, h_1 ≈ 14,3 dm, s ≈ 16,3 dm, O ≈ 13,3 m^2
c. h ≈ 13,8 cm, h_1 ≈ 14,1 cm, s ≈ 14,2 cm, V ≈ 146 cm^3

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2025. | www.oebv.at | Das ist Mathematik SB + E-Book+ 4 | ISBN: 978-3-209-12274-9
Alle Rechte vorbehalten. Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet.
Die Kopiergebühren sind abgegolten. Für Veränderungen durch Dritte übernimmt der Verlag keine Verantwortung.