LÖSUNG ZU 809:

a) 1)

Die Differenzfunktion d ist als Differenz der Funktionen f und g definiert. Da f eine Polynomfunktion 3. Grades und g eine lineare Funktion ist, wird durch eine Subtraktion $f(x) - g(x)$ der Term $\frac{1}{120} \cdot x^3$ auf jeden Fall unverändert bleiben. Dadurch ist auch die Funktion d eine Polynomfunktion 3. Grades.

Nullstellen werden durch Lösen der Gleichung $d(x) = 0 = f(x) - g(x)$ berechnet. Die Nullstellen erhalten wir also auch durch Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$. Dies entspricht exakt den x-Werten der Schnittpunkte der Funktionen. Wir sehen in der Abbildung, dass f und g drei Schnittpunkte haben. Die Funktion d hat also drei Nullstellen.

Insgesamt ist also der folgende Satz richtig:
Die Funktion d ist **eine Polynomfunktion 3. Grades** und hat **3** Nullstellen.

(Anmerkung: Es wäre auch möglich, die Differenzfunktion explizit zu ermitteln, indem man zuerst die Funktion g aufstellt)

2)

Grundsätzlich gilt, dass der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ positiv ist, wenn $f(x) > g(x)$ für alle $x \in [a; b]$ und negativ ist, wenn $g(x) > f(x)$ für alle $x \in [a; b]$.

Im angegebenen Intervall $[3; 23]$, in dem das bestimmte Integral berechnet wird, hat die Differenzfunktion d eine Nullstelle bei $x = 10$, da hier $f(10) = g(10)$ ist.

Das bestimmte Integral im Intervall $[3;\ 10]$ ist positiv und entspricht dem Flächeninhalt A_1 der Fläche zwischen den Funktionsgraphen f und g im Intervall $[3; 10]$.

Das bestimmte Integral im Intervall $[10; 23]$ ist negativ und entspricht also dem „negativen Flächeninhalt" $-A_2$ der Fläche zwischen den Funktionsgraphen f und g im Intervall $[10; 23]$.

Das Integral im Intervall $[3; 23]$ ergibt also insgesamt $A_1 + (-A_2)$, also die Differenz zwischen den Flächeninhalten der beiden Flächenstücke

Die Zahl -33,3 bedeutet also, dass der Flächeninhalt der Fläche im Intervall $[10; 23]$ um 33,3 Flächeneinheiten größer ist als der Flächeninhalt der Fläche im Intervall $[3; 10]$.

3)

Wir ermitteln zunächst die Funktionsgleichung von g. In der Abbildung erkennen wir, dass g durch die Punkte $A = (3|2)$ und $C = (23|9)$ verläuft. Es gilt also:

$$I: 2 = 3 \cdot k + d$$
$$II: 9 = 23 \cdot k + d$$

Mit Technologie erhalten wir $k = 0{,}35$ und $d = 0{,}95$.

Da der Graph von f im Intervall $[3; 10]$ oberhalb vom Graphen von g verläuft und der Graph von g im Intervall $[10; 23]$ oberhalb vom Graphen von f verläuft, gilt für den entsprechenden Flächeninhalt A:

$$A = \int_{3}^{10} \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x + \int_{10}^{23} \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x$$

Mit Technologie können wir nun den Wert berechnen:

$$A = \int_{3}^{10} \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x + \int_{10}^{23} \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x = 7{,}86\ldots + 41{,}19\ldots = \mathbf{49{,}05}\ldots$$

b) 1)

Wir müssen zunächst a finden. Es soll gelten: $f(a) = f(20{,}3) = 4$. Der Graph der Funktion zeigt, dass der Funktionswert an der Stelle 11 den Wert 4 hat, also gilt $\boldsymbol{a = 11}$.

Der Satz von Rolle behauptet nun, dass es eine Stelle m im Intervall $[11; 20{,}3]$ gibt, an der $f'(m) = 0$ gilt. Es gilt also:

$$f'(m) = \frac{1}{120} \cdot (3 \cdot m^2 - 72 \cdot m + 371) = 0$$

Mit Technologie lösen wir diese Gleichung und erhalten $m_1 = 7{,}49\ldots$ und $m_2 = 16{,}50\ldots$

Da $m \in [11; 20{,}3]$ gelten muss, ist $\boldsymbol{m_2 = 16{,}5}\ldots$ die richtige Lösung.