

# 11 DIE BINOMIALVERTEILUNG UND WEITERE VERTEILUNGEN

- W 11.01** Was sind Binomialkoeffizienten? Wie kann man diese deuten? Wie kann man sie berechnen?
- W 11.02** Eine Binomialverteilung der Zufallsvariablen  $H$  mit den Parametern  $n$  und  $p$  wird mit der Formel  $P(H = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  beschrieben. Unter welchen Bedingungen ist  $H$  binomialverteilt? Erkläre die Bedeutung der Parameter  $n$ ,  $k$  und  $p$  in der Formel!
- W 11.03** Formuliere eine typische Aufgabenstellung, die mit der Binomialverteilung gelöst werden kann!
- W 11.04** Wie ist eine  $n$ -stufige Bernoulli-Kette (bzw. ein  $n$ -stufiges Bernoulli-Experiment) definiert?
- W 11.05** Unter welchen Voraussetzungen kann eine Versuchsserie, die einem mehrmaligen Ziehen ohne Zurücklegen entspricht, mit Binomialverteilung modelliert werden?
- W 11.06** Wie lassen sich Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  einer binomialverteilten Zufallsvariablen  $H$  ermitteln?
- W 11.07** Was versteht man unter einer geometrischen Verteilung einer Zufallsvariablen  $H$ ? Was gilt für den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ ?
- W 11.08** Was versteht man unter einer hypergeometrischen Verteilung einer Zufallsvariablen  $H$ ? Was gilt für den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ ?



W 11.01 Für  $n, k \in \mathbb{N}^*$  mit  $k \leq n$  setzt man:  $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ . Ergänzend setzt man  $\binom{n}{0} = 1$ .

Die Zahlen  $\binom{n}{k}$  nennt man Binomialkoeffizienten.

Es ist  $\binom{n}{k}$  gleich der Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge.

Es ist  $\binom{n}{k}$  gleich der Anzahl der aus zwei Buchstaben  $a$  und  $b$  gebildeten Wörter der Länge  $n$ , in denen  $a$  genau  $k$ -mal vorkommt.

W 11.02 Wird ein Zufallsversuch  $n$ -mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt und tritt dabei ein Ereignis  $E$  jedes Mal mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  ein, dann ist die absolute Häufigkeit  $H$  des Eintretens von  $E$  binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

In der Formel  $P(H = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  bedeutet  $n$  die Anzahl der Versuchsdurchführungen,  $k$  die Anzahl und  $p$  die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von  $E$  in der Versuchsserie.

W 11.03 ZB: Ein Zweisektoren-Glücksrad mit einem schwarzen und einem weißen Sektor wird 10-mal unter denselben Bedingungen gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt der Zeiger 6-mal im schwarzen Sektor stehen?

W 11.04 Die  $n$ -malige Wiederholung eines Zufallsversuchs bezeichnet man als  $n$ -stufige Bernoulli-Kette (bzw.  $n$ -stufiges Bernoulli-Experiment), wenn gilt:

- Jeder Einzelversuch besitzt genau zwei Versuchsausgänge (zB Erfolg und Nichterfolg).
- Jeder Einzelversuch wird unter gleichen Bedingungen durchgeführt (was insbesondere bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg nicht ändert).

W 11.05 Entspricht eine Versuchsserie einem mehrmaligen Ziehen ohne Zurücklegen und ist die Stichprobe klein im Vergleich zur Grundgesamtheit, so ist die untersuchte Häufigkeit  $H$  annähernd binomialverteilt und es gilt:

$$P(H = k) \approx \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

W 11.06 Ist  $H$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern  $n$  und  $p$ , dann gilt für den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  von  $H$ :  $\mu = E(H) = n \cdot p$ ,  $\sigma^2 = V(H) = n \cdot p \cdot (1-p)$ .

W 11.07 Bei einem Zufallsversuch tritt ein Ereignis  $E$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  ein. Der Versuch wird  $n$ -mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt. Ist  $H$  die Anzahl der Versuchsdurchführungen bis zum erstmaligen Eintreten von  $E$ , dann gilt:

$$P(H = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad (\text{für } k = 1, 2, 3, \dots)$$

Sei  $H$  eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten  $1, 2, 3, \dots$ . Wird jedem Wert  $k \in \mathbb{N}^*$  die Wahrscheinlichkeit  $P(H = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$  zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als geometrische Verteilung mit dem Parameter  $p$ . Die Zufallsvariable  $H$  nennt man geometrisch verteilt mit dem Parameter  $p$ .

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable  $H$  mit dem Parameter  $p$  gilt:

$$E(H) = \mu = \frac{1}{p}, \quad V(H) = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

W 11.08 In einer Menge von  $N$  Objekten haben  $M$  Objekte die Eigenschaft  $E$  und  $N - M$  Objekte die Eigenschaft  $\neg E$ . Aus der Menge der  $N$  Objekte werden  $n$  Objekte zufällig ausgewählt. Ist  $H$  die absolute Häufigkeit der dabei erhaltenen Objekte mit der Eigenschaft  $E$ ,

$$\text{dann gilt: } P(H = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Sei  $H$  eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten  $0, 1, 2, \dots, N$ . Wird jedem Wert  $k$  die Wahrscheinlichkeit  $P(H = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

(mit  $1 \leq M \leq N, 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n, n-k \leq N-M$ ) zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N, M$  und  $n$ . Die Zufallsvariable  $H$  nennt man hypergeometrisch verteilt mit den Parametern  $N, M$  und  $n$ .

Für eine hypergeometrisch verteilte Zufallsvariable  $H$  mit den Parametern  $N, M$  und  $n$  gilt:

$$E(H) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}, \quad V(H) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

