LÖSUNG ZU 803:

a) 1)

Wir müssen drei Bedingungen finden, damit wir die Koeffizienten a, b und c der Funktion f berechnen können. Da der Tennisball in 8 m waagrechter Entfernung seine maximale Flughöhe erreicht, gilt $f'(8) = 0$. Das Netz befindet sich bei $x = 12$ und ist 0,91 m hoch. Da der Ball 0,29 m über das Netz fliegt, gilt $f(12) = 1{,}2$. Da der Ball bei $x = 20$ wieder den Boden erreicht gilt außerdem $f(20) = 0$. Um das Gleichungssystem aufstellen zu können, bilden wir noch die 1. Ableitung von f: $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Wir erhalten nun die nachstehenden drei Gleichungen:

I: $f'(8) = 0$: $\quad 0 = 16 \cdot a + b$

II: $f(12) = 1{,}2$: $\quad 1{,}2 = 144 \cdot a + 12 \cdot b + c$

III: $f(20) = 0$: $\quad 0 = 400 \cdot a + 20 \cdot b + c$

Mit Technologie erhalten wir: $a = -\frac{3}{320}, b = \frac{3}{20}, c = \frac{3}{4}$

Es gilt also: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{3}{320} \cdot x^2 + \frac{3}{20} \cdot x + \frac{3}{4}}$

2)

Mithilfe von $f'(0)$ kann die Steigung des Graphen der Funktion f im Abschlagpunkt berechnen werden. Es gilt $f'(x) = -\frac{6}{320} \cdot x + \frac{3}{20}$ und somit $f'(0) = \frac{3}{20}$.

Für den Abschlagswinkel α gilt somit: $\tan(\alpha) = \frac{3}{20}$ bzw. $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{20}\right)$

Es ergibt sich $\boldsymbol{\alpha = 8{,}53}$ ...°

b) 1)

Für das Volumen einer Kugel mit Radius r gilt $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$. Für das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h gilt $V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$. In diesem Fall entspricht die Höhe h des Tennisbehälters, der als Zylinder modelliert wird, dem 6-fachen Radius, also $h = 6r$. Daher ist V auch nur von r abhängig. Um den Leerraum, der durch die Funktion V modelliert wird, zu erhalten, müssen wir vom Volumen des Zylinders 3 Mal das Volumen der Kugel abziehen, da sich im Behälter drei kugelförmige Tennisbälle befinden. Wir erhalten somit:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot 6r - 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi\right) = 6 \cdot r^3 \cdot \pi - 4 \cdot r^3 \cdot \pi = \boldsymbol{2 \cdot r^3 \cdot \pi}$$

c) 1)

Damit Spieler A höchstens nach 4 Ballwechsel ab dem Einstand gewinnt, gibt es 3 Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Spieler A gewinnt die nächsten 2 Ballwechsel und das Game ist zu Ende.
Wahrscheinlichkeit : $p \cdot p = p^2$

2. Möglichkeit: Spieler A verliert den 1. Ballwechsel und gewinnt dann 3 Ballwechsel in Folge.
Wahrscheinlichkeit: $(1 - p) \cdot p^3$

3. Möglichkeit: Spieler A gewinnt den 1. Ballwechsel, verliert den 2. Ballwechsel und gewinnt den 3. und 4. Ballwechsel.
Wahrscheinlichkeit: $p \cdot (1-p) \cdot p^2 = (1-p) \cdot p^3$

Durch Addition dieser drei Wahrscheinlichkeiten erhalten wir das Ergebnis:
$\boldsymbol{P(E) = p^2 + 2 \cdot (1-p) \cdot p^3}$