Lösung zu 637:

Koch'sche Schneeflocke

a)

1) Mit s = 1 gilt: $u_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$u_1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 = 4$ $\quad$ $u_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$ $\quad$ $u_3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}$

$u_4 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{27}$ $\quad$ $u_5 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{81}$

b)

1) $5600 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ $\quad$ |:3

$\frac{5600}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ $\quad$ | logarithmieren

$\ln\left(\frac{5600}{3}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ $\quad$ |: $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$n = \frac{\ln\left(\frac{5400}{3}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

$n = 26{,}181\ldots$ Nach 27 Konstruktionsschritten ist der Umfang auf über 5600 angewachsen.

c)

1) Für die Summe einer endlichen geometrischen Reihe gilt: $s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

D.h. $A_n = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1}$ $\quad \rightarrow \quad$ $A_{20} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{20} - 1}{\frac{4}{9} - 1} \approx \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot 0{,}8$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{0-1}{\frac{4}{9} - 1} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{5} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{20}$