

Thema: Geometrische Zahlenfolgen		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: mittel	Klasse:

1. Eine Stadt hat 25 000 Einwohner. Der jährliche Bevölkerungsrückgang beträgt konstant 2%. Nach rund wie vielen Jahren wird die Stadt nur mehr 20 000 Einwohner haben?

2. Die Intensität einer radioaktiven Strahlung sinkt bei der Durchdringung einer Bleiplatte auf 80% des Ausgangswerts. Bestimme, wie viel Prozent des Ausgangswerts nach der Durchdringung der fünften Bleiplatte noch vorhanden sind.

3. Ein Kapital wird zu einem effektiven Jahreszinssatz von 2,5% angelegt. Bestimme den Zeitraum (in ganzen Jahren), nach dem sich das Kapital das erste Mal mehr als verdoppelt hat.

4. Die gleichschwebende Stimmung von Musikinstrumenten ist die meistverbreitete für Klavier und Orgel. Dabei wird eine Oktav in 12 Halbtöne eingeteilt, deren Frequenzen eine geometrische Folge bilden. Bestimme die Frequenzen aller Halbtöne zwischen 440 Hz und 880 Hz.



Thema: Geometrische Zahlenfolgen - Lösungen		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad:	Klasse:

1. Eine Stadt hat 25 000 Einwohner. Der jährliche Bevölkerungsrückgang beträgt konstant 2%. Nach wie vielen Jahren wird die Stadt nur mehr 20 000 Einwohner haben?

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 25\,000 & q &= 0,98 & b_n &= 20\,000 \\
 b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\
 q^{n-1} &= \frac{b_n}{b_1} & & \text{| logarithmieren} \\
 (n-1) \cdot \ln(q) &= \ln(b_n) - \ln(b_1) \\
 n-1 &= \frac{\ln(b_n) - \ln(b_1)}{\ln(q)} \\
 n &= \frac{\ln(b_n) - \ln(b_1)}{\ln(q)} + 1 \quad \rightarrow \quad n \approx 11,05
 \end{aligned}$$

Nach rund 11 Jahren wird die Stadt nur mehr ca. 20 000 Einwohner haben.

2. Die Intensität einer radioaktiven Strahlung sinkt bei der Durchdringung einer Bleiplatte auf 80% des Ausgangswerts. Bestimme, wie viel Prozent des Ausgangswerts nach der Durchdringung der fünften Bleiplatte noch vorhanden sind.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 \text{ (= 100\%)} & q &= 0,8 \\
 b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\
 b_n &= 0,8^{n-1} & b_6 &= 0,8^5 \approx 0,33
 \end{aligned}$$

Nach der Durchdringung der fünften Platte ist die Intensität auf rund 33% des Ausgangswerts gesunken.

3. Ein Kapital von 1 200€ wird zu einem effektiven Jahreszinssatz von 2,5% angelegt. Bestimme den Zeitraum, nach dem sich das Kapital das erste Mal mehr als verdoppelt hat.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1\,200 & q &= 1,025 & b_n &= 2\,400 \text{ (= } 2 \cdot b_1) \\
 b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\
 q^{n-1} &= \frac{b_n}{b_1} & & \text{| logarithmieren} \\
 (n-1) \cdot \ln(q) &= \ln(b_n) - \ln(b_1) \\
 n-1 &= \frac{\ln(b_n) - \ln(b_1)}{\ln(q)} \\
 n &= \frac{\ln(b_n) - \ln(b_1)}{\ln(q)} + 1 \quad \rightarrow \quad n \approx 28,07
 \end{aligned}$$

Nach 29 Jahren hat sich das Kapital das erste Mal mehr als verdoppelt.

4. Die gleichschwebende Stimmung von Musikinstrumenten ist die meistverbreitete für Klavier und Orgel. Dabei wird eine Oktav in 12 Halbtöne eingeteilt, deren Frequenzen eine geometrische Folge bilden. Bestimme die Frequenzen aller Halbtöne zwischen 440 Hz und 880 Hz.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 440 & b_{13} &= 880 & 880 &= 440 \cdot q^{12} & \rightarrow & q &= \sqrt[12]{2} \\
 b_n &= 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{n-1} \\
 b_1 &= 440 \text{ Hz} & b_3 &\approx 494 \text{ Hz} & b_5 &= 554 \text{ Hz} & b_7 &\approx 622 \text{ Hz} & b_9 &\approx 698 \text{ Hz} & b_{11} &\approx 784 \text{ Hz} & b_{13} &= 880 \text{ Hz} \\
 b_2 &\approx 466 \text{ Hz} & b_4 &\approx 523 \text{ Hz} & b_6 &= 587 \text{ Hz} & b_8 &\approx 659 \text{ Hz} & b_{10} &\approx 740 \text{ Hz} & b_{12} &\approx 831 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

