12 KOMPLEXE ZAHLEN

W 12.01 Welche grundlegende Gleichung gilt für die Zahl i?
Wie nennt man die Zahl i, wie die Zahlen $b \cdot i$ (mit $b \in \mathbb{R}$), wie die Zahlen $a + b \cdot i$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$)?

W 12.02 Was versteht man unter dem Realteil, was unter dem Imaginärteil einer komplexen Zahl?

W 12.03 Welche Beziehung besteht zwischen der Menge $\mathbb{R}$ und der Menge $\mathbb{C}$?

W 12.04 Wie lauten die Lösungen der Gleichung $x^2 = -a$ (mit $a \in \mathbb{R}^+$)?

W 12.05 Was versteht man unter konjugiert komplexen Zahlen? Was lässt sich über Summe und Produkt solcher Zahlen aussagen?

W 12.06 Beschreibe die Lösungsfälle für quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten, wenn auch komplexe Zahlen als Lösungen zugelassen sind!

W 12.07 Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?

W 12.08 Wie kann man komplexe Zahlen geometrisch veranschaulichen?

W 12.09 Wie kann man die Addition und (reelle) Vervielfachung komplexer Zahlen geometrisch veranschaulichen?

W 12.10 Wie kann man komplexe Zahlen als Zahlenpaare deuten? Welchem Zahlenpaar entspricht die imaginäre Einheit i, welchem die imaginäre Zahl bi, welchem die komplexe Zahl $a + bi$?

W 12.11 Was versteht man unter der Polardarstellung einer komplexen Zahl z?

W 12.01 Für die Zahl i gilt: $i^2 = -1$. Die Zahl i nennt man imaginäre Einheit. Die Zahlen der Form $b \cdot i$ (mit $b \in \mathbb{R}$) nennt man imaginäre Zahlen. Die Zahlen der Form $a + b \cdot i$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) nennt man komplexe Zahlen.

W 12.02 Man bezeichnet a als Realteil und b als Imaginärteil der komplexen Zahl $a + b \cdot i$.

W 12.03 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

W 12.04 $x = -\sqrt{a} \cdot i \;\lor\; x = \sqrt{a} \cdot i$

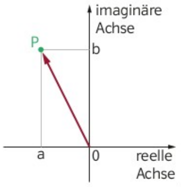
W 12.05 Man bezeichnet $a + bi$ und $a - bi$ als zueinander konjugiert komplexe Zahlen.
Für die konjugiert komplexen Zahlen $a + bi$ und $a - bi$ gilt:
- $(a + bi) + (a - bi) = 2a$, dh. die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl.
- $(a + bi) - (a - bi) = 2bi$, dh. die Differenz zweier konjuguert komplexer Zahlen ist eine imaginäre Zahl.
- $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2$, dh. das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl.

W 12.06 Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ hat
- zwei reelle Zahlen als Lösungen, wenn $D > 0$,
- genau eine reelle Zahl als Lösung, wenn $D = 0$,
- zwei komplexe Zahlen als Lösungen, wenn $D < 0$.

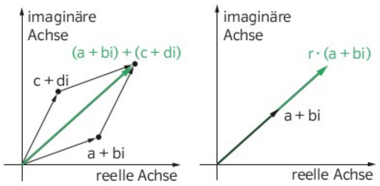
In allen drei Fällen gilt: $x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

W 12.07 Jede algebraische Gleichung vom Grad n mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Lösung.

W 12.08 Man kann also jede komplexe Zahl $a + bi$ durch das Zahlenpaar $(a \mid b)$ beschreiben. Ein solches Zahlenpaar kann man als Punkt P in einem Koordinatensystem darstellen. Statt eines Punktes kann man auch einen von O zu P gehenden Pfeil zeichnen. Die Ebene bezeichnet man in diesem Zusammenhang als Gauß'sche Zahlenebene oder komplexe Zahlenebene.



W 12.09 Die Addition und Vervielfachung komplexer Zahlen entsprechen den jeweiligen Rechenoperationen mit Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und lassen sich in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen:



W 12.10 $a = (a \mid 0)$, $i = (0 \mid 1)$, $bi = (0 \mid b)$, $a + bi = (a \mid b)$

W 12.11 Die Darstellung $z = r \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$ einer komplexen Zahl z heißt Polardarstellung von z.