Thema: Aussagenlogik		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:**	**Klasse:**

Aussage und Aussageform

Muss man für einen Sachverhalt entscheiden, ob er **wahr** oder **falsch** ist, spricht man in der Mathematik von einer **Aussage**.

Der Sachverhalt kann in Form eines Satzes oder in rein mathmatischer Schreibweise (durch eine Gleichung oder Ungleichung) gegeben sein.

z.B.
A: Paris ist die Hauptstadt von Frankreich → Aussage A ist wahr

B: 56 > 100 → Aussage B ist falsch

Treten in einer Aussage Variable auf, lässt sich der Wahrheitsgehalt der Aussage (wahr oder falsch) nur durch Einsetzen passender Zahlenwerte oder Begriffe für die Varibale feststellen. In diesem Fall spricht man von einer **Aussageform**.

z.B.
A(x): x ist eine Primzahl → Für x = 2 ist die Aussage „A(2): 2 ist eine Primzahl" wahr
Für x = 4 ist die Aussage „A(4): 4 ist eine Primzahl" falsch

B(x): Die Hauptstadt von Österreich ist x → Für x = Wien ist die Aussage wahr, für x = Prag ist die Aussage falsch

Verknüpfung von Aussagen

Aussagen können miteinander verknüpft werden. Der Wahrheitsgehalt der angegebenen Verknüpfung kann wieder überprüft werden.

Konjunktion („UND"-Verknüpfung)

Ist die Verknüpfung zweier Aussagen A und B nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist, heißt die Verknüpfung Konjunktion.

Verknüpfungszeichen ... $\wedge$

z.B.
A: 5 ist eine Primzahl → wahre Aussage
B: 48 ist ein Vielfaches von 12 → wahre Aussage

$A \wedge B$ = (5 ist eine Primzahl) $\wedge$ (48 ist ein Vielfaches von 12) → wahre Aussage

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion („ODER"-Verknüpfung)

Ist die Verknüpfung zweier Aussagen A und B wahr, wenn entweder Aussage A oder Aussage B oder beide Aussagen wahr sind, heißt die Verknüpfung Disjunktion.

Verknüpfungszeichen ... $\vee$

z.B.
A: 4 = 5 → falsche Aussage
B: 144 : 12 = 12 → wahre Aussage
A $\vee$ B = (4 = 5) $\vee$ (144 : 12 = 12) → wahre Aussage

A: Alle Autos haben Räder → wahre Aussage
B: Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos → falsche Aussage
A $\vee$ B = (Alle Autos haben Räder) $\vee$ (Alle Fahrzeuge mit Rädern sind Autos) → wahre Aussage

A: 13 + 14 = 27 → wahre Aussage
B: 30 ist eine gerade natürliche Zahl → wahre Aussage
A $\vee$ B = (13 + 14 = 27) $\vee$ (30 ist eine gerade natürliche Zahl) → wahre Aussage

Wahrheitstafel:

A	B	A $\vee$ B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation („WENN ... DANN" – Verknüpfung)

Folgt aus der Aussage A logisch die Aussage B, heißt die Verknüpfung Implikation.

Die Implikation der Aussagen A und B ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. In allen anderen Fällen ist die Implikation wahr.

Verknüpfungszeichen ... $\rightarrow$

z.B.
A: p ist eine lokale Extremstelle der Funktion f
B: Die Steigung der Tangente an der Stelle p ist null

A $\rightarrow$ B, d.h. aus der Aussage „p ist eine lokale Extremstelle der Funktion f" folgt logisch die Aussage „Die Steigung der Tangente an der Stelle p ist null". **„B gilt dann, wenn A gilt"**

Man sagt auch: Aussage A ist **hinreichend** für B. Die Aussage B ist **notwendig** für die Aussage A.

Da aus B nicht unbedingt A folgen muss (p könnte auch eine Sattelstelle sein, wenn die Steigung der Tangente an dieder Stelle null ist!), ist die Aussage B **notwendig** aber **nicht hinreichend** dafür, dass p eine lokale Extremstelle ist.

Wahrheitstafel:

A	B	A → B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Äquivalenz („GENAU DANN ... WENN" – Verknüpfung)

Die wechselseitige Implikation wird als Äquivalenz bezeichnet.

Die Äquivalenz der Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn A und B wahr bzw. A und B falsch sind.

Verknüpfungszeichen ... ⟺

z.B.
A: Die Ziffernsumme der Zahl 198 ist durch 9 teilbar
B: Die Zahl 198 ist durch 9 teilbar

Es gilt: A → B und B → A, d.h. A ⟺ B

z.B.
A: p ist eine lokale Extremstelle der Funktion f
B: Die Steigung der Tangente an der Stelle p ist null und f ändert an der Stelle p ihr Monotonieverhalten

Es gilt: A → B und B → A, d.h. A ⟺ B **„B gilt genau dann, wenn A gilt"**

Man sagt auch: Aussage A ist **notwendig und hinreichend** für Aussage B. Aussage B ist **notwendig und hinreichend** für Aussage A.

Wahrheitstafel:

A	B	A ⟺ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Negation

Die Negation einer Aussage ist genau dann falsch, wenn die Aussage wahr ist und genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist.

Zeichen ... ¬ („NICHT“)

z.B.
A: 4 ist eine Primzahl → falsche Aussage
¬A: 4 ist keine Primzahl → wahre Aussage

B: W.A. Mozart hat die Oper „Der Freischütz“ komponiert → falsche Aussage
¬B: W.A. Mozart hat nicht die Oper „Der Freischütz“ komponiert → wahre Aussage

Wahrheitstafel:

A	¬A
w	f
f	w