12 GERADEN IN $\mathbb{R}^2$

W 12.01 Was versteht man unter einer Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$?

W 12.02 Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ sei durch die Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ gegeben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Punkten der Geraden und den reellen Zahlen t? Welchen Parameterwert hat P bzw. Q?

W 12.03 Wie viele Parameterdarstellungen kann eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ haben? Begründe!

W 12.04 Wie kann man eine Parameterdarstellung vereinfachen? Begründe die Vorgehensweise!

W 12.05 Kann ein Punkt P auf einer Geraden g bei zwei verschiedenen Parameterdarstellungen von g den gleichen Parameterwert haben? Begründe!

W 12.06 Kann ein Punkt P auf einer Geraden g bei zwei verschiedenen Parameterdarstellungen von g verschiedene Parameterwerte haben? Begründe!

W 12.07 Kann eine Gerade g sowohl eine Parameterdarstellung der Form $X = P + t \cdot \vec{g}$ (mit $P \neq O$) als auch der Form $X = t \cdot \vec{g}$ haben? Erläutere die Antwort an einem Beispiel!

W 12.08 Gegeben sei die Gerade g durch den Punkt P mit dem Normalvektor $\vec{n}$. Wie kann man eine Gleichung der Geraden g finden?

W 12.09 Eine Gerade habe die Gleichung $n_1x + n_2y = c$. Wie kann man einen Normalvektor der Geraden finden? Wie kann man einen Punkt der Geraden finden?

W 12.10 Eine Gerade g sei durch eine Parameterdarstellung gegeben. Wie kann man feststellen, ob ein vorgegebener Punkt A auf g liegt?

W 12.11 Eine Gerade g sei durch eine Gleichung gegeben. Wie kann man feststellen, ob ein vorgegebener Punkt A auf g liegt?

W 12.12 Gegeben sei eine Gerade g in Parameterdarstellung. Erläutere, wie man eine Parameterdarstellung einer Parallelen zu g durch einen vorgegebenen Punkt P erhält!

W 12.13 Gegeben sei eine Gerade g in Parameterdarstellung. Erläutere, wie man eine Parameterdarstellung einer Normalen zu g durch einen vorgegebenen Punkt P erhält!

W 12.14 Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die zwei vorgegebene Punkte enthält?

W 12.15 Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft und zu einer gegebenen Geraden parallel ist?

W 12.16 Wie kann man eine Gleichung einer Geraden finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft und zu einer gegebenen Geraden normal ist?

W 12.17 Zwei Geraden g und h seien durch Parameterdarstellungen gegeben. Wie kann man die gegenseitige Lage von g und h erkennen und gegebenenfalls den Schnittpunkt ermitteln?

W 12.18 Zwei Geraden g und h seien durch eine Gleichung gegeben. Wie kann man die gegenseitige Lage von g und h erkennen und gegebenenfalls den Schnittpunkt ermitteln?

W 12.01 Die Vektorgleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$ nennt man eine Parameterdarstellung der Geraden g mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\vec{g}$ ein Richtungsvektor von g.

W 12.02 Jedem Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ entspricht genau ein Punkt auf der Geraden und umgekehrt. Wenn t ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, durchläuft X (laufender Punkt) die ganze Gerade. P: $t = 0$, Q: $t = 1$

W 12.03 Eine Gerade g kann unendlich viele Parameterdarstellungen haben, weil man den festen Punkt P und den Richtungsvektor $\vec{g}$ auf unendlich viele Arten wählen kann.

W 12.04 Man darf eine Parameterdarstellung $X = P + t \cdot \vec{g}$ einer Geraden vereinfachen, indem man ein geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{g}$ nimmt. Denn auf die Länge des Richtungsvektors $\vec{g}$ kommt es nicht an. Mit dem festen Punkt P darf man dies im Allgemeinen nicht machen.

W 12.05 Ja. Ist zB $P = (1 \mid -1)$ und g: $X = (5 \mid 1) + t \cdot (-2 \mid -1)$ mit $t = 2$, ist $P \in g$. Eine andere Darstellung von g ist beispielsweise $X = (-7 \mid -5) + t \cdot (4 \mid 2)$ mit $t = 2$, hier ist ebenfalls $P \in g$.

W 12.06 Ja. ZB stellen die Parameterdarstellungen $X = (5 \mid 1) + t \cdot (-2 \mid -1)$ und $X = (-3 \mid -3) + t \cdot (2 \mid 1)$ dieselbe Gerade dar. In beiden Fällen besitzt der Punkt $P = (1 \mid -1)$ den Parameter $t = 2$.

W 12.07 Ja, das ist möglich, zB: $X = (5 \mid 1) + t \cdot (5 \mid 1)$ und $X = t \cdot (5 \mid 1)$.

W 12.08 Es sind $\vec{n} = (n_1 \mid n_2)$, $X = (x \mid y)$ und $P = (p_1 \mid p_2)$. Dann kann eine Gleichung für g entweder durch $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$ oder durch $n_1x + n_2y = n_1p_1 + n_2p_2$ angeschrieben werden.

W 12.09 Es ist $\vec{n} = (n_1 \mid n_2)$. Einen Punkt findet man zum Beispiel dadurch, dass man einen Wert für x wählt und den dazugehörigen Wert für y aus der Gleichung ausrechnet.

W 12.10 Ein Punkt A liegt genau dann auf g: $X = P + t \cdot \vec{g}$, wenn $\overrightarrow{PA} \parallel \vec{g}$ ist.

W 12.11 Ein Punkt A liegt genau dann auf g: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$, wenn $\vec{n} \cdot A = \vec{n} \cdot P$, dh., wenn die Koordinaten von A die Gleichung erfüllen.

W 12.12 Man nimmt P als festen Punkt und als Richtungsvektor einen Richtungsvektor von g.

W 12.13 Man nimmt P als festen Punkt und als Richtungsvektor einen Normalvektor von g.

W 12.14 Seien P und Q die vorgegebenen Punkte. Man ermittelt den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und einen dazugehörigen Normalvektor $\vec{n}$. Eine Gleichung der Geraden lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.

W 12.15 Man ermittelt einen Normalvektor $\vec{n}$ der gegebenen Geraden. Dieser ist auch Normalvektor der gesuchten Parallelen. Eine Gleichung der Parallelen lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.

W 12.16 Ein Richtungsvektor der gegebenen Geraden ist ein Normalvektor $\vec{n}$ der gesuchten Normalen. Eine Gleichung der Normalen lautet dann $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$.

W 12.17 Sei g: $X = P + s \cdot \vec{g}$ und h: $X = Q + t \cdot \vec{h}$

$\vec{g} \nparallel \vec{h}$ $\Rightarrow$ g und h schneiden einander.
Gleichsetzen der beiden rechten Seiten liefert ein lineares Gleichungssystem in s und t.
Durch Einsetzen der Lösungen in die Parameterdarstellungen erhält man den Schnittpunkt von g und h.

$\vec{g} \parallel \vec{h} \wedge \overrightarrow{PQ} \nparallel \vec{g}$ $\Rightarrow$ g und h sind parallel und verschieden.

$\vec{g} \parallel \vec{h} \wedge \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{g}$ $\Rightarrow$ g und h fallen zusammen.

W 12.18 Sei g: $a_1x + a_2y = a_0$ und h: $b_1x + b_2y = b_0$.

$b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 \neq r \cdot a_2$ $\Rightarrow$ g und h schneiden einander.
Den Schnittpunkt $(x \mid y)$ erhält man durch Lösen des Gleichungssystems, das aus den beiden Geradengleichungen besteht.

$b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 = r \cdot a_2 \wedge b_0 \neq r \cdot a_0$ $\Rightarrow$ g und h sind parallel und verschieden.

$b_1 = r \cdot a_1 \wedge b_2 = r \cdot a_2 \wedge b_0 = r \cdot a_0$ $\Rightarrow$ g und h fallen zusammen.