42 Vertiefendes zur SRT

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand August 2012)

Relativistischer Dopplereffekt

A1 Dein Raumschiff wird von einem Meteor verfolgt (Abb. 1). Wie verändern sich dessen Relativgeschwindigkeit und Energie, wenn du das Raumschiff beschleunigst? Dein Raumschiff wird von einem Photon verfolgt (b). Wie ist es in diesem Fall?

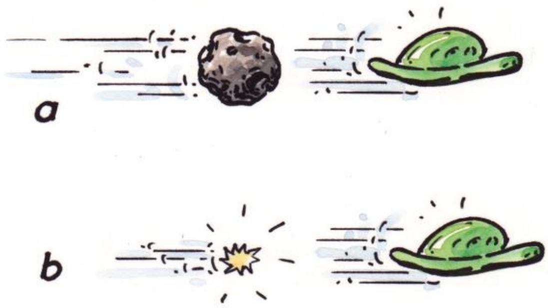

Abb. 1 (Grafik Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.2, S. 31)

A2 Der Astronom Edwin Hubble machte 1929 eine Entdeckung, mit der er die Vorstellung vom Universum radikal veränderte. Hubble entdeckte mit Hilfe der Rotverschiebung der Galaxien (Kap. 42.1), dass das Universum nicht statisch ist, sondern expandiert. Denkt man sich die Bewegung rückwärts, bedeutet das, dass der Kosmos salopp gesagt irgendwann als explodierender Punkt begonnen haben muss. Man spricht heute vom Big Bang, vom Urknall. Kommt der Effekt der Rotverschiebung der Galaxien durch den Dopplereffekt zu Stande?

A3 Kommentiere folgendes Zitat (Quelle: www.gym-vaterstetten.de): "Betrachtet man das Licht von entfernten Galaxien, so stellt man fest, dass alle charakteristischen Linien (z.B. die Linien des Wasserstoffs) in den Spektren zu niedrigen Frequenzen (in den roten Bereich) verschoben sind, und zwar um so mehr, je weiter die Galaxien von uns entfernt sind. Ähnlich wie die Frequenz des Huptons eines Autos bei Bewegung auf uns zu höher wird, und bei Bewegung von uns weg tiefer, sinkt auch die Frequenz des Lichtes, wenn sich eine Lichtquelle von uns entfernt, und zwar um so mehr, je schneller sich die Lichtquelle entfernt (Dopplereffekt)."

A4 In der Tabelle siehst du die Doppler-Frequenzveränderungen in Abhängigkeit von Bewegungsform und Wellenart. Es fällt auf, dass bei mechanischen Wellen zwischen bewegtem Beobachter und bewegter Quelle unterschieden wird, bei elektromagnetischen Wellen jedoch nicht! Warum ist das so?

Mechanische Wellen	
bewegter Beobachter $+v_B$ nähernd $-v_B$ entfernend	$f_B = f_Q\,(1 \pm v_B / v)$
bewegte Quelle $-v_Q$ nähernd $+v_Q$ entfernend	$f_B = f_Q \dfrac{1}{1 \pm v_Q / v}$
Elektromagnetische Wellen	
Gilt beim Entfernen. Bei Annäherung muss v_{BQ} im Zähler und Nenner mit –1 multipliziert werden; v_{BQ} = Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter; c = Lichtgeschwindigkeit	$f_B = f_Q \sqrt{\dfrac{1 - v_{BQ}/c}{1 + v_{BQ}/c}}$

Tab. 1: Doppler-Frequenzveränderungen in Abhängigkeit von Bewegungsform und Wellenart (siehe auch Tab. 20.1, S. 63, BB6). Bei mechanischen Wellen bezeichnet v die Wellen-Geschwindigkeit.

A5 Leite die Formel für den relativistischen Dopplereffekt ab. Gehe dazu von der Formel für eine sich entfernende Quelle bei mechanischen Wellen (Tab. 1) aus und berücksichtige die Zeitdilatation.

A6 a In Abb. 2 siehst du ein Gitter, das mit 0,9 c auf dich zukommt. Wie könnte es zu den seltsamen Verzerrungen kommen?

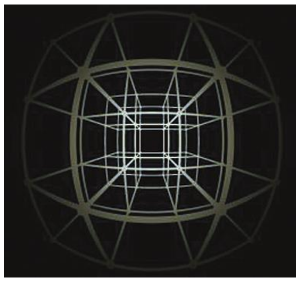

Abb. 2 (Quelle: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

A6 b Wie sieht das Gitter aus Abb. 2 aus, wenn du es ruhend betrachtest? So wie Abb. 3 links (weiß) oder rechts (rot)? Wie kannst du das begründen?

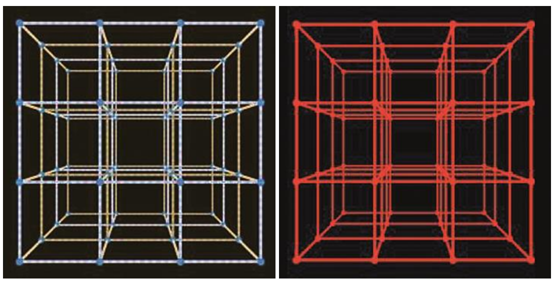

Abb. 3 (Quelle: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

A7 a Berechne allgemein aus der Formel in Tab. 1 die relative Frequenzverschiebung $f_B/f_Q = x$ für Annäherungen in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit v_{BQ} bei elektromagnetischen Wellen.

A7 b Du fliegst mit deinem Raumgleiter in einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 0,1 *c* an einer roten Ampel vorbei. Eine Raumstreife hält dich deswegen auf. Du behauptest, das Licht sei ganz sicher grün gewesen. Trotzdem, oder gerade deswegen, musst du sogar doppelt zahlen! Warum? Überlege dazu, was mit dem roten Licht bei schneller Annäherung passiert. Nimm an, dass das grüne Licht eine Wellenlänge von 550 nm hat und das rote 650 nm. Weiters gilt $f = c/\lambda$. Verwende für deine Berechnungen das Ergebnis aus A7 a!

A8 Auf dem Heck eines Autos siehst du einen roten Sticker (Abb. 4). Worauf wird hier angespielt? Argumentiere zuerst qualitativ und berechne dann konkret mit Hilfe von Tab. 2 und dem Ergebnis von A7 a. Es gilt $f = c/\lambda$.

Abb. 4 (Foto: Martin Apolin)

	relative Photonenenergie	Wellenlänge in 10^{-7} m	Frequenz 10^{14} Hz
rot	1–1,2	6,5–7,5	4,0–4,6
grün	1,3–1,5	4,9–5,8	5,2–6,1
blau	1,5–1,8	4,2–4,9	6,1–7,1
UV-A	1,9–2,3	3,2–4,0	7,5–9,38
UV-B	2,3–2,7	2,8–3,2	9,38–10,7

Tab. 2: Relative Photonenenergie von sichtbarem und ultraviolettem Licht (die niedrigste Energie von roten Photonen wurde mit 1 angenommen).

A9 Die Farbe eines sich dir nähernden Objekts ist auf Grund des Dopplereffekts blauverschoben. Trotzdem kann es sein, dass das Objekt rot erscheint. Warum? Die Farbe eines sich von dir entfernenden Objekt ist auf Grund des Dopplereffekts rotverschoben. Trotzdem kann es sein, dass das Objekt blau erscheint. Warum?

A10 a Wie groß ist der Wurzelfaktor beim Dopplereffekt bei 0,6 *c* bei Entfernung und Annäherung? Verwende dazu die Gleichung aus Tab. 1.

A10 b Die Forscher Alice und Bob leben beide auf der Erde. Bob besteigt sein Raumschiff und macht sich mit exakt 0,6 *c* auf eine einstündige Reise. Eine halbe Stunde hin, eine halbe Stunde zurück. Exakt jede Minute schickt der Laser an Bord seines Raumschiffs einen Lichtblitz auf die Erde. Nachdem für ihn genau eine Stunde vergangen ist und er genau 60 Lichtblitze verschickt hat, ist Bob wieder zurück. Wie sieht die Spritztour aber aus Sicht von Alice aus? In welchen Zeitabständen bekommt sie die Lichtblitze? Wie viel Zeit ist daher inzwischen für Alice vergangen?

A10 c Überprüfe das Ergebnis aus 10 b mit Hilfe der Zeitdilatation!

A11 Um das Zentrum der Galaxie M87 rotiert ein Gasnebel. Wenn sich dieser von der Erde wegbewegt, ist das Spektrum rotverschoben (Maximum bei 501,5 nm), wenn er sich auf die Erde zu bewegt, ist es blauverschoben (499,8 nm; Abb. 5).

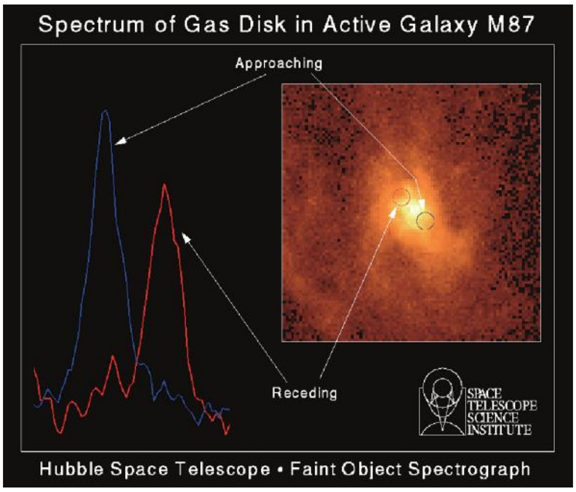

Abb. 5 (Quelle: NASA)

a Angenommen, die Wellenlänge nimmt im gleichen Ausmaß zu und ab. Wie groß wäre dann die Ruhewellenlänge λ_R?

b Berechne nun mit Hilfe des Ergebnisses von A7 a die maximale Annäherungsgeschwindigkeit (= Tangentialgeschwindigkeit) des Nebels. Es gilt $f = c/\lambda$.

c Die in A11 b berechnete Geschwindigkeit ist jene, mit der sich der Nebel um das Zentrum bewegt. Damit er eine Kreisbahn beschreiben kann, muss die Gravitationskraft $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ die nötige Zentripetalkraft $F_{ZP} = \frac{mv^2}{r}$ liefern (siehe Kap. 13.1, BB6). Leite daraus eine Formel für die Größe der Zentralmasse *M* ab, wenn alle anderen Werte bekannt sind.

d Der Radius der rotierenden Gasscheibe beträgt an der beobachteten Stelle 100 Lichtjahre, also $9{,}46\cdot10^{17}$ m. Die Gravitationskonstante *G* beträgt $6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. Wie groß ist daher die Masse innerhalb des Nebels? Vergleich mit der Masse der Sonne von etwa $2\cdot10^{30}$ kg. Was kann man daraus schließen?

Geschwindigkeitsaddition

A12 Nimm an, ein Raumschiff bewegt sich relativ zu seinem Bezugssystem mit 0,6 *c* (Abb. 6a). Und jetzt nimm an, du bewegst dich relativ zu diesem Bezugssystem ebenfalls mit 0,6 *c* (b). Wie schnell ist dann das Raumschiff aus deiner Sicht? Es kann ja nicht 1,2 *c* haben?! Argumentiere qualitativ. Überlege weiters, warum Abb. 6 eigentlich nicht richtig gezeichnet ist.

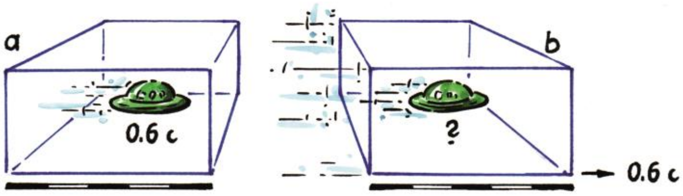

Abb. 6 (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.5, S. 32)

A13 a Was ist in Abb. 7 dargestellt. Überprüfe die Angabe! Verwende dazu den exakten Wert für die Lichtgeschwindigkeit von 299 792 458 m/s.

Abb. 7 (Grafik: Janosch Slama)

A13 b Eine Stewardess geht mit 5 km/h in Richtung Cockpit. Das Flugzeug selbst fliegt mit 900 km/h an dir vorbei. Wie schnell bewegt sich daher die Stewardess an dir vorbei? Rechne exakt und runde nicht! Verwende die Gleichung $w = \frac{u+v}{1+\frac{u\cdot v}{c^2}}$ für die Geschwindigkeitsaddition.

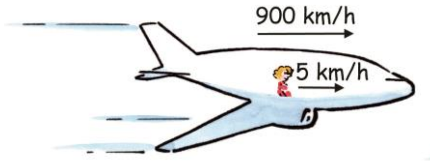

Abb. 7 (Grafik: Janosch Slama)

A14 Die relativistische Geschwindigkeitsaddition gibt dir den mathematischen Grund für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, eine der beiden Grundannahmen der Speziellen Relativitätstheorie. Überprüfe diese Grundannahme, indem du in der Gleichung aus A13 b die Geschwindigkeit $v = c$ setzt.

Lorentz-Transformation

A15 Leite mit Hilfe der Lorentz-Transformation (Tab. 3 nächste Seite) die Formel für die Geschwindigkeitsaddition $w = \frac{u+v}{1+\frac{u\cdot v}{c^2}}$ ab. Hilf dir mit Abb. 8. Dabei ist *u* die Geschwindigkeit, die das Raumschiff im System I' hat, und *v* die Geschwindigkeit, mit der sich das System I' wiederum am System I vorbeibewegt. Ersetzte den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ jeweils durch γ, weil dieser Faktor zum Schluss sowieso wegfällt. Was du letztlich berechnen möchtest, ist $w = x/t$, also die Geschwindigkeit, mit der sich das Raumschiff in Bezug auf dein System I bewegt. Dazu musst du vorher aber noch einige Umformungen durchführen (siehe a bis c auf der nächsten Seite).

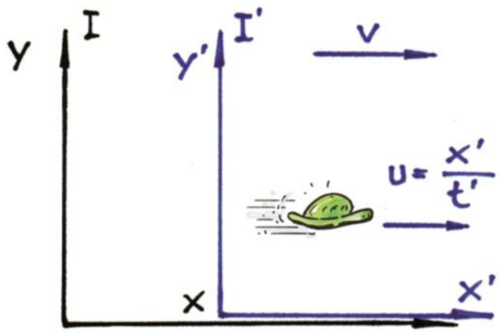

Abb. 8 (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.17, S. 37)

a Gehe zunächst von der Formel für *x* aus (Tab. 3). Forme diese so um, dass du *u* ins Spiel bringen kannst (siehe Abb. 8).

b Gehe nun von der Formel für *t* aus (Tab. 3) und ersetze x' durch $u{\cdot}t'$. Forme die Gleichung dann so um, dass du später leicht kürzen kannst.

c Berechne nun die Geschwindigkeit *w*, die das Raumschiff durch die Überlagerung beider Bewegungen hat.

$x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t = \dfrac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Tab. 3: Die Gleichungen für die Lorentz-Transformation

A16 Was würde mit der Lorentz-Transformation passieren, wenn die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß wäre?

A17 Leite die Lorentz-Kontraktion aus den Gleichungen der Lorentz-Transformation (Tab. 3) ab. Nimm dazu an, dass ein Waggon im Inertialsystem I' ruht und dort die Länge *l'* hat ($x'_{Anfang} = 0$, $x'_{Ende} = l'$; siehe Abb. 9). I' bewegt sich zu I mit der Geschwindigkeit *v*. Wie lang ist der Waggon aus der Sicht von I? Dazu muss man die *x*-Koordinaten der Waggon-Enden zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* messen. Ihre Differenz ist dann die gesuchte Länge *l* des Waggons.

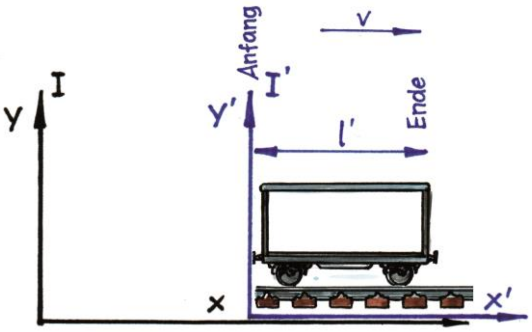

Abb. 9 (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.16, S. 36)

Minkowski-Diagramme

Minkowski-Diagramme wurde 1908 von Hermann Minkowski entwickelt und dienen der Veranschaulichung der Eigenschaften von Raum und Zeit in der SRT. Sie erlauben ein quantitatives Verständnis der Phänomene der SRT ohne Formeln. Zugunsten der Darstellbarkeit wird bei den Minkowski-Diagrammen auf zwei der drei Raumdimensionen verzichtet und nur das Geschehen in einer eindimensionalen Welt betrachtet. Anders als bei Weg-Zeit-Diagrammen üblich, wird der Weg auf der *x*-Achse und die Zeit auf der *y*-Achse dargestellt. Als Maßeinheiten werden auf der *x*-Achse Lichtsekunden (1 LS ≈ $3{\cdot}10^8$ m) und auf der *y*-Achse Sekunden aufgetragen (Abb. 10).

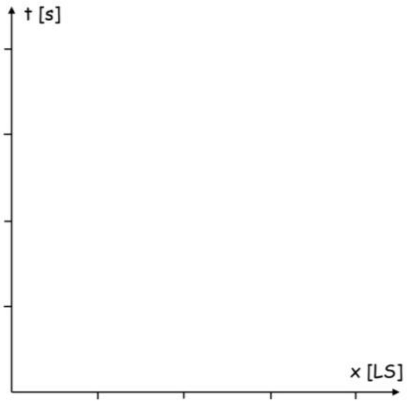

Abb. 10: ein Minkowski-Diagramm (Grafik: Martin Apolin)

A18 Jedes Objekt, das man beobachtet, erzeugt in diesem Diagramm eine sogenannte "Weltlinie". Zeichne in Abb. 9 eine Weltlinie für ein Photon und für ein Raumschiff, das sich mit 0,5 *c* bewegt, ein. Beide sollen sich zum Zeitpunkt *t* = 0 bei *x* = 0 befinden. Überlege qualitativ, welchen Winkel die Weltlinie eines Objekts in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit zur *x*-Achse einschließt.

A19 a Besonders spannend ist es, wenn man ein zweites System I' einzeichnet, das sich relativ zu I bewegt. Dazu muss man die Lage der *x'*- und *t'*-Achse konstruieren. Überlege mit Hilfe dreier Raumschiffe, die sich mit 0,5 *c* relativ zu I bewegen und im System I' ruhen. In Abb. 11 ist die Weltlinie des linken Raumschiffs eingezeichnet. Dessen obere Spitze befindet sich zum Zeitpunkt *t* = *t'* = 0 bei *x* = *x'* = 0. Überlege, welche Lage die *x'*-Achse haben muss! Bedenke, dass das Raumschiff in I' ruht und sich daher aus diesem System gesehen nicht von der *t'*-Achse entfernt.

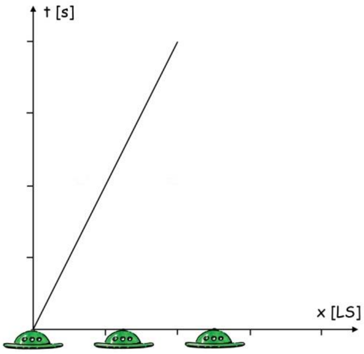

Abb. 11 zu A19 a: Drei Raumschiffe, die sich mit 0,5 *c* bewegen. Es ist die Weltlinie des linken Raumschiffs eingezeichnet (Grafik: Martin Apolin).

19 b Konstruiere nun auch die x'-Achse. Zeichne dazu auch die Weltlinien der beiden anderen Raumschiffe ein. Überlege dann so: Für alle Ereignisse, die auf der x'-Achse liegen, muss $t' = 0$ gelten (so wie auch für alle Ereignisse auf der x-Achse $t = 0$ gilt). Diese Ereignisse sind in I' gleichzeitig, aber nicht in I. Daher kann die x'-Achse nicht mit der x-Achse identisch sein. Zur Konstruktion der x'-Achse genügt es, zwei Ereignisse zu finden, die in I' gleichzeitig sind. Wenn du z. B. von der Spitze der äußeren Raumschiffe gleichzeitig einen Lichtstrahl aussendest, dann werden diese aus der Sicht von I' zur selben Zeit beim mittleren Raumschiff eintreffen. Bedenke, dass Lichtstrahlen Weltlinien haben, die unter 45 ° verlaufen (siehe A18).

19 c Um die Koordinaten eines Ereignisses in I abzulesen (in unserem Fall der Punkt in Abb. 12), misst man die Normalabstände zu den Koordinatenachsen. Um die t'-Koordinaten eines Ereignisses in I' abzulesen, zieht man durch den Punkt eine Parallele zur t'-Achse und bestimmt den Abstand zur x'-Achse. Dieser entspricht der t'-Koordinate des Ereignisses (Abb. 12 rechts). Um die x'-Koordinaten eines Ereignisses in I' abzulesen, zieht man durch den Punkt eine Parallele zur x'-Achse und bestimmt den Abstand zur t'-Achse. Dieser entspricht der x'-Koordinate des Ereignisses.

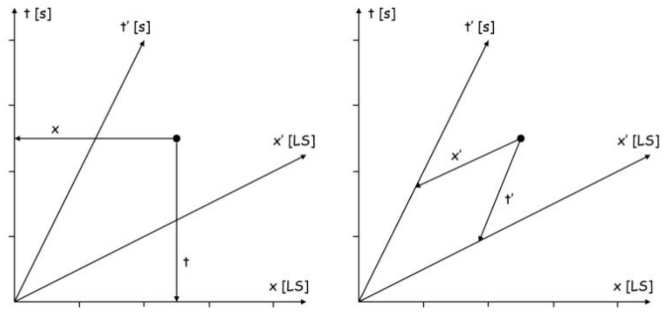

Abb. 12: Ablesen der Koordinaten in den beiden Systemen (Grafik: Martin Apolin).

Begründe mit Hilfe von Abb. 11 und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, dass der Winkel zwischen t und t' genauso groß sein muss wie zwischen x und x'!

A20 In Abb. 13 siehst du einen Stab, der im System I die Länge 1 LS hat - zugegeben ein sehr langer Stab. Welche Länge hat er in I'? Zeichne umgekehrt einen Stab ein, der in I' die Länge von 1 LS hat und konstruiere seine Länge in I. Was kann man erkennen?

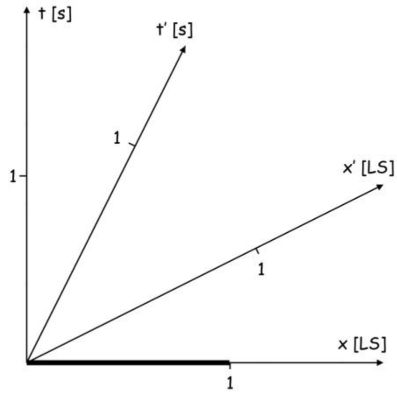

Abb. 13: Ein Stab mit der Länge 1 LS im System I. Wie lang ist er im System I'? (Grafik: Martin Apolin).

A 21 Führe analog zu A20 Überlegungen zum Gang der Zeit durch. Wie viel Zeit ist in I vergangen, wenn in I' eine Sekunde vergangen ist und umgekehrt?

Hilfe zu A1: Wenn du von einem Meteor verfolgt wirst und die Geschwindigkeit erhöhst, dann sinkt seine Relativgeschwindigkeit und mit ihr seine Energie. Wie ist das, wenn du von einem Photon verfolgt wirst? Wenn du Licht als Welle betrachtest, dann muss sich auf Grund des Dopplereffekts die Frequenz verringern - die Geschwindigkeit des Lichts kann sich aber natürlich nicht verändern! Egal wie stark du beschleunigst, das Photon prallt immer mit *c* auf! Die Frequenz des Photons verschiebt sich aber in Richtung des roten Bereichs des Spektrums, und man spricht daher von Rotverschiebung. Mit der Frequenz verringert sich auch seine Energie. Würde das Raumschiff im Retourgang beschleunigen, dann käme es zu einer Blauverschiebung. Beim relativistischen Dopplereffekt spielt auch die Zeitdehnung eine Rolle.

Hilfe zu A2: Die von Hubble gemessene Rotverschiebung kommt *nicht* durch den Dopplereffekt zu Stande, sondern durch die Expansion des Raumes und ist somit kein Effekt der Speziellen, sondern der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wenn das Universum seine Größe während der Reise eines Photons verdoppelt, verdoppelt sich dessen Wellenlänge und seine Energie halbiert sich (Abb. 14).

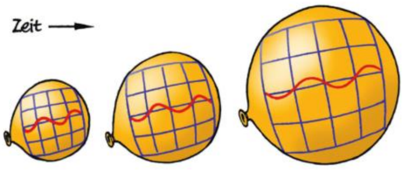

Abb. 14: Wenn das All expandiert, wird auch die Wellenlänge des Lichts gestreckt. Die Rotverschiebung nimmt also während der gesamten Reise des Photons zu. Man spricht von der kosmologischen Rotverschiebung, um sie nicht mit der Doppler-Rotverschiebung zu verwechseln (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 49.12, S. 102).

Hilfe zu A3: Es handelt sich hier um das häufige Missverständnis, dass die Rotverschiebung der Galaxien, mit der man die Expansion des Universums belegen kann, durch den Dopplereffekt zu Stande kommt (siehe auch A2). Dieser kommt jedoch durch eine Bewegung der Galaxien *durch den Raum* zu Stande. Im Falle der Rotverschiebung durch Expansion ist es aber der gesamte Raum, der sich von uns wegbewegt. Bei einer zum Raum ruhenden Galaxis tritt aber keine Doppler-Rotverschiebung auf, sehr wohl aber eine Rotverschiebung durch die Expansion (siehe auch Abb. 14).

Hilfe zu A4: Elektromagnetische Wellen benötigen zur Ausbreitung kein Medium. Daher ist es egal, ob sich der Sender bewegt oder der Beobachter - es kommt nur auf die Relativgeschwindigkeit an.

Hilfe zu A5: Nimm an, dass sich eine Lichtquelle mit der Geschwindigkeit *v* von dir entfernt. Die Frequenz, die ein ruhender Beobachter messen kann, ergibt sich dann aus $f_B = f_Q \frac{1}{1+\frac{v_Q}{c}}$. Bei hohen Geschwindigkeiten muss man aber zusätzlich die Zeitdehnung berücksichtigen. Vergrößert sich der Abstand zwischen Quelle und Beobachter, dann vergeht die Zeit um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v_Q^2}{c^2}}$ langsamer. Um denselben Faktor sinkt daher auch die Frequenz. Deshalb kann man schreiben: $f_B = f_Q \frac{\sqrt{1-\frac{v_Q^2}{c^2}}}{1+\frac{v_Q}{c}}$. Wir ersetzen nun *v/c* durch *a* und formen um: $f_B = f_Q \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a} = f_Q \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = f_Q \sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{(1+a)(1+a)}} = f_Q \sqrt{\frac{(1-a)}{(1+a)}}$. Nun ersetzen wir *a* wieder und erhalten $f_B = f_Q \sqrt{\frac{(1-v_Q/c)}{(1+v_Q/c)}}$. Weil es bei elektromagnetischen Wellen nur auf die Relativgeschwindigkeit v_{BQ} ankommt, können wir allgemein schreiben $f_B = f_Q \sqrt{\frac{(1-v_{BQ}/c)}{(1+v_{BQ}/c)}}$.

Hilfe zu A6 a: Wenn man sich relativ zu einem Objekt mit einer Geschwindigkeit nahe *c* bewegt, führen die unterschiedlichen Lichtlaufzeiten zu optischen Verzerrungen. Natürlich ginge alles so schnell, dass man dazu eine Kamera mit Supersupersuperzeitlupe benötigen würde. Überlegen wir mit Hilfe eines Stabes, der sich quer mit sehr hoher Geschwindigkeit auf eine Kamera zu bewegt (Abb. 15). Exemplarisch sind 5 Lichtstrahlen eingezeichnet, die alle zur selben Zeit bei der Kamera eintreffen (d). Je weiter außen am Stab die Strahlen ausgehen, desto länger brauchen sie zur Kamera, desto früher wurden sie daher ausgesandt und desto weiter sieht man sie daher in der Vergangenheit. Dadurch wird der Stab scheinbar zu einer Hyperbel verzerrt. Diese hyperbolische Verzerrung gilt generell für Linien quer zur Bewegungsrichtung, also auch für das Gitter in Abb. 2.

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2010. | www.oebv.at | Big Bang 8 | ISBN: 978-3-209-04868-4

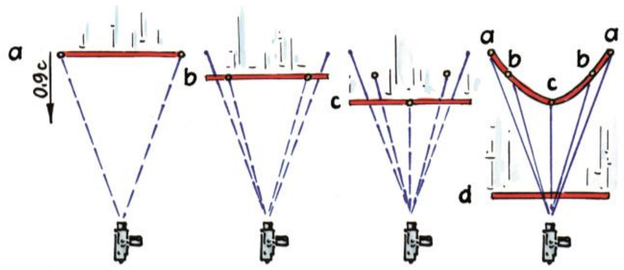

Abb. 15: Ein Stab bewegt sich mit 0,9 c auf eine Kamera zu (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 39.12, S. 13).

Hilfe zu A6 b: Bei Annäherung des Gitters kommt es zur Blauverschiebung. In Ruhe muss das Spektrum daher gegenüber der Annäherung rotverschoben sein. Du siehst das Gitter daher so wie in Abb. 3 rechts (siehe auch A9).

Hilfe zu A7 a: Man kann die Gleichung zum relativistischen Dopplereffekt für Annäherung auch so anschreiben: $\frac{f_B}{f_Q} = \sqrt{\frac{(1+v_{BQ}/c)}{(1-v_{BQ}/c)}} = x$. Daraus folgt weiters

$$x^2 = \frac{\left(1+\frac{v_{BQ}}{c}\right)}{\left(1-\frac{v_{BQ}}{c}\right)} = \frac{(c+v_{BQ})}{(c-v_{BQ})}$$

$$x^2(c-v_{BQ}) = (c+v_{BQ})$$

$$x^2c - x^2v_{BQ} = c + v_{BQ}$$

$$x^2c - c = x^2v_{BQ} + v_{BQ}$$

$$c(x^2-1) = v_{BQ}(x^2+1)$$

und somit

$v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$ mit $\frac{f_B}{f_Q} = x$.

Hilfe zu A7 b: Wenn du auf eine Ampel zufliegst, dann ist das rote Licht blauverschoben. Rotes Licht hat eine Wellenlänge von etwa 650 nm und somit die Frequenz $f_Q = c/\lambda = 4{,}6\cdot10^{14}$ Hz; das grüne, das du statt dessen beobachten kannst, hat eine Wellenlänge von etwa 550 nm und somit die Frequenz $f_B = 5{,}5\cdot10^{14}$ Hz. Daraus folgt $x = \frac{f_B}{f_Q} = \frac{5{,}5}{4{,}6} \approx 1{,}2$ und $x^2 \approx 1{,}44$. Wenn du nun in $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$ einsetzt, erhältst du $v_{BQ} \approx 0{,}18c$. Du hast also nicht nur eine rote Ampel überflogen, sondern warst auch noch um 80 % zu schnell unterwegs. Deshalb musst du doppelt zahlen.

Hilfe zu A8: Wenn du dich dem Auto mit dem Sticker schnell, also wirklich sehr schnell annäherst, dann ist die Farbe des Stickers blauverschoben und kann somit tatsächlich blau werden. Wie schnell musst du dafür fahren? Wir nehmen den Fall mit der geringstmöglichen Frequenzverschiebung und somit auch der geringsten Relativgeschwindigkeit an. Das ist der Fall, wenn die rote Farbe des Stickers eine Wellenlänge von $6{,}5\cdot10^{-7}$ m (650 nm) hat und das Blau, das du auf Grund deiner erhöhten Geschwindigkeit wahrnimmst, 490 nm. Weiters gilt $f = c/\lambda$. Du kannst nun die Frequenz berechnen (wie in A7 b) oder argumentieren, dass $f \sim 1/\lambda$ ist und daher $x = \frac{f_B}{f_Q} = \frac{\frac{1}{\lambda_B}}{\frac{1}{\lambda_Q}} = \frac{\lambda_Q}{\lambda_B} = \frac{650\ \text{nm}}{490\ \text{nm}} = 1{,}33$. Daraus folgt $x^2 \approx 1{,}77$. Daher müsste die Annäherungsgeschwindigkeit $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)} = \frac{0{,}77}{2{,}77}c \approx 0{,}28\,c$ betragen. Das ist tatsächlich viel zu schnell!

Hilfe zu A9: Blauverschiebung bedeutet, dass alle Frequenzen des Spektrums des Objekts zu einer höheren Frequenz verschoben sind. Es bedeutet aber *nicht*, dass das Objekt dann zwangsläufig blau sein muss. Wenn das Objekt z. B. im Ruhezustand Infrarot strahlt, kann die Blauverschiebung dazu führen, dass das Objekt dann rot aussieht. Auch das Gitter in Abb. 2 ist nicht blau, obwohl sein Spektrum blauverschoben ist, weil es im Ruhezustand rot ist (Abb. 3 rechts). Umgekehrt gilt: Rotverschiebung bedeutet, dass alle Frequenzen des Spektrums des Objekts zu einer niedrigeren Frequenz verschoben sind. Es bedeutet aber *nicht*, dass das Objekt zwangsläufig rot sein muss. Wenn das Objekt z. B. im Ruhezustand Ultraviolett strahlt, kann die Rotverschiebung dazu führen, dass das Objekt dann blau aussieht.

Hilfe zu A10 a: Bei Entfernen gilt $f_B = f_Q\sqrt{\frac{(1-v_{BQ}/c)}{(1+v_{BQ}/c)}}$. Bei 0,6 *c* ist der Wurzelfaktor daher $\sqrt{\frac{(1-v_{BQ}/c)}{(1+v_{BQ}/c)}} = \sqrt{\frac{(1-0{,}6)}{(1+0{,}6)}} = \sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}6}} = 2$. Beim Annähern wird v_{BQ} im Zähler und Nenner mit -1 multipliziert und es gilt daher $\sqrt{\frac{(1+v_{BQ}/c)}{(1-v_{BQ}/c)}} = \sqrt{\frac{1{,}64}{0{,}4}} = \frac{1}{2}$.

Hilfe zu A10 b: Wie sieht die Spritztour aus der Sicht von Alice aus? Zunächst empfängt sie die 30 Lichtblitze der Ausreise. Durch den Dopplereffekt kommen sie bei ihr aber nicht jede Minute, sondern alle zwei Minuten an (siehe A10 a und Abb. 16). Dann empfängt Alice die 30 Blitze der Rückreise. Durch den Dopplereffekt kommen diese aber jede halbe Minute an (siehe A10 a und Abb. 17). Wie viel Zeit ist also für Alice vergangen? 30·½ min = 60 min + 15 min = 75 min!

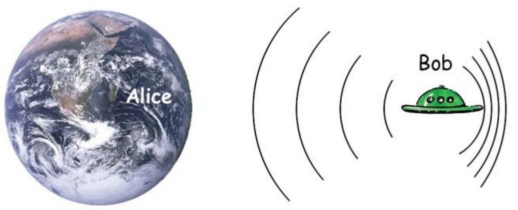

Abb. 16: Bei der Ausreise kommen die Lichtblitze alle 2 Minuten ...

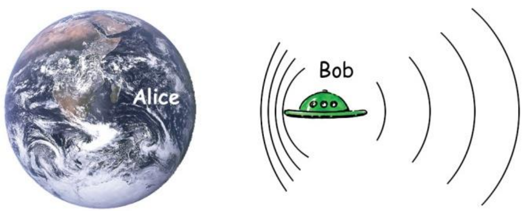

Abb. 17: ... bei der Rückreise jede ½ Minute (Grafiken: Martin Apolin)

Hilfe zu A10 c: Bob ist aus seiner Sicht eine Stunde mit 0,6 *c* unterwegs. Daher gilt $t_\mathrm{b} = 60\ \mathrm{min} = t_\mathrm{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t_\mathrm{r}\sqrt{1-0{,}36} = t_\mathrm{r}\sqrt{0{,}64} = 0{,}8 \cdot t_\mathrm{r}$. Daraus folgt $t_\mathrm{r} = \frac{60\ \mathrm{min}}{0{,}8} = 75\ \mathrm{min}$.

Hilfe zu A11 a: λ_R = (501,5 nm + 499,8 nm)/2 = 500,65 nm.

Hilfe zu A11 b: Aus $\frac{f_B}{f_Q} = \sqrt{\frac{(1+v_{BQ}/c)}{(1-v_{BQ}/c)}} = x$ folgt $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$ (siehe A7a). Bei der Annäherung ist das Licht blauverschoben, die Wellenlänge somit kürzer (499,8 nm). Aus $f = c/\lambda$ folgt $f \sim 1/\lambda$. Daher gilt $x = \frac{f_B}{f_Q} = \frac{\frac{1}{\lambda_B}}{\frac{1}{\lambda_Q}} = \frac{\lambda_Q}{\lambda_B} = \frac{500{,}65\ \mathrm{nm}}{499{,}8\ \mathrm{nm}} = 1{,}0017$. x^2 ist daher 1,0034 und $v_{BQ} = c\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)} = c\frac{1{,}0034-1}{1{,}0034+1} \approx 5{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}$.

Hilfe zu A11 c: Die benötigte Zentripetalkraft kommt durch die Gravitation zu Stande. Man kann daher beide Gleichungen gleichsetzen und nach *M* auflösen: $F_G = G\frac{mM}{r^2} = F_{ZP} = \frac{mv^2}{r} \to M = \frac{v^2 r}{G}$.

Hilfe zu A11 d: Die Bahngeschwindigkeit des Nebels beträgt $5{,}1 \cdot 10^5$ m/s (A11 b). Daher erhält man $M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{26{,}01 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{17}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}\ \mathrm{kg} = 3{,}7 \cdot 10^{39}\ \mathrm{kg}$. Das entspricht etwa $(3{,}7 \cdot 10^{39}$ kg$)/(2 \cdot 10^{30}$ kg$) = 1{,}85 \cdot 10^9$ Sonnenmassen, also beinahe 2 Milliarden Sonnenmassen. Mit hoher Wahrscheinlichkeit handelt es sich im Zentrum von M87 um ein superschweres schwarzes Loch.

Hilfe zu A12: Wenn sich das System an dir vorbei bewegt, dann ist es erstens längenkontrahiert (Abb. 18b). Diese Längenkontraktion ist in Abb. 6b nicht dargestellt! Außerdem siehst du das Raumschiff in Zeitlupe durch sein Bezugssystem fliegen. Daraus ergibt sich ein kürzerer Weg in einer längeren Zeit – seine Geschwindigkeit sinkt also von uns aus gesehen ab.

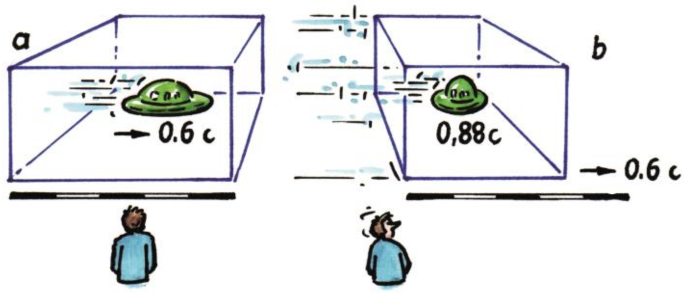

Abb. 18: Im Gegensatz zu Abb. 6b ist hier in der Grafik auch die Lorentz-Kontraktion berücksichtigt (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 42.5, S. 32).

Hilfe zu A13 a: Auf der Tafel ist die Höchstgeschwindigkeit im Universum - also die Lichtgeschwindigkeit - in km/h angegeben. Diese beträgt 299 792 458 m/s oder 299 792 458 ·3,6 km/h ≈ 1 079 252 849 km/h.

Hilfe zu A13 b: Wenn du in $w = \frac{u+v}{1+\frac{u \cdot v}{c^2}}$ für *u* = 900 km/h, für *v* = 5 km/h und für *c* = 1 079 252 849 km/h einsetzt, erhältst du für *w* 904,999999999997 km/h. Die Differenz ist also $3 \cdot 10^{-12}$ km/h oder 3 nm/h.

Hilfe zu A14: $w = \frac{u+v}{1+\frac{u \cdot v}{c^2}} = \frac{u+c}{1+\frac{u \cdot c}{c^2}} = \frac{u+c}{1+\frac{u}{c}} = \frac{u+c}{\frac{c}{c}+\frac{u}{c}} = \frac{u+c}{\frac{u+c}{c}} = c$.

Egal, mit welcher Geschwindigkeit du dich relativ zu einem System mit einem Photon bewegst, dessen Geschwindigkeit ist immer *c*. Trotz allem sehr erstaunlich!

Hilfe zu A15 a: Es gilt $x = \gamma(x' + vt') = \gamma t'\left(\frac{x'}{t'} + v\right)$. Dabei ist $\frac{x'}{t'}$ aber nichts anderes als *u* des Objekts im System I' (siehe Abb. 8). Daher kann man schreiben $x = \gamma t'\left(\frac{x'}{t'} + v\right) = \gamma t'(u+v)$.

Hilfe zu A15 b: Es gilt $t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \gamma\left(t' + \frac{vut'}{c^2}\right) = \gamma t'\left(1 + \frac{vu}{c^2}\right)$.

Hilfe zu A15 c: Es gilt nun $w = \frac{x}{t} = \frac{\gamma t'(u+v)}{\cancel{\gamma t'}\left(1+\frac{vu}{c^2}\right)} = \frac{u+v}{1+\frac{vu}{c^2}}$.

Hilfe zu A16: Fangen wir mit dem Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ an. Wenn $c = \infty$ wäre, dann würde gelten:
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$. Wenn *c* unendlich groß wäre, würde also der Wurzelfaktor verschwinden. Es würde dann folgen $t = t' + \frac{vx'}{c^2} = t' + 0 = t'$. Auch die Relativität der Gleichzeitigkeit und die Zeitdilatation würden verschwinden. Letztlich

würde gelten $x = x' + vt'$. Es gäbe also auch keine Lorentz-Kontraktion mehr. Zusammenfassend kann man sagen, wäre die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß, würde die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation übergehen, und alle relativistischen Effekte würden verschwinden. Die Effekte der SRT sind also eine Folge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von *c*.

Hilfe zu A17: Wir kennen *x'* und *t* und wollen *x* ausrechnen. Daher müssen wir zuerst umformen:

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x - vt \rightarrow x = x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

Wenn zum Zeitpunkt *t* der Anfang des Waggons im System I' gerade bei $x'_{Anfang} = 0$ ist, dann gilt $x_{Anfang} = x'_{Anfang}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt = 0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt = vt$.

Zu diesem Zeitpunkt befindet sich das Ende des Waggons im System I' gerade bei $x'_{Ende} = l'$. Daher gilt $x_{Ende} = x'_{Ende}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$. Die Waggonlänge aus der Sicht von I ist daher $x_{Ende} - x_{Anfang} = l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt - vt = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Hilfe zu A18: Das Lichtteilchen legt in 1 s den Weg von 1 LS zurück. Seine Weltlinie läuft daher unter 45 ° durch das Diagramm. Das Raumschiff mit 0,5 *c* legt in 2 s den Weg 1 LS zurück und ist daher steiler (siehe Abb. 19).

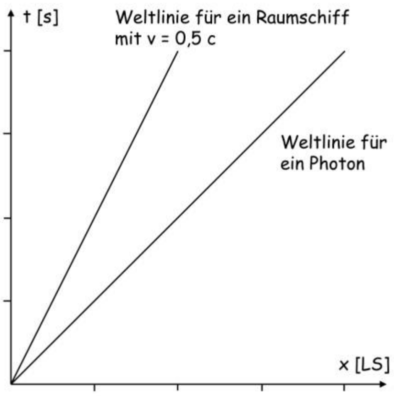

Abb. 19
(Grafik: Martin Apolin)

Generell gilt: Je schneller das Objekt, desto flacher wird die Weltlinie. Der Winkel von 45 ° zur *t*-Achse kann jedoch nicht überschritten werden.

Hilfe zu A19 a: Aus der Sicht des Systems I', das sich mit dem Raumschiff mitbewegt, ruht das Raumschiff natürlich. Das Raumschiff verändert daher seinen Abstand zu *t'*-Achse nicht. Diese muss somit in Richtung der Weltlinie zeigen (Abb. 20).

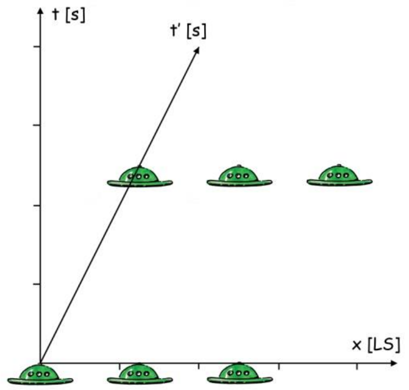

Abb. 20: Die *t'*-Achse ist mit der Weltlinie des linken Raumschiffes identisch (Grafik: Martin Apolin).

Hilfe zu A19 b: Zeichne zuerst auch die beiden anderen Weltlinien ein (Abb. 21). Dann zeichne die Weltlinie eines Lichtstrahls ein, der bei *t'* = 0 von der Spitze des linken Raumschiffes ausgeht (Abb. 22). Dieser schneidet die Weltlinie des mittleren Raumschiffes. Der Lichtstrahl des rechten Raumschiffes muss ebenfalls dort die Weltlinie schneiden (Abb. 23).
In Abb. 24 sind zusätzlich die Raumschiffe eingezeichnet. Bei a wird der linke Lichtstrahl ausgesendet, bei b der rechte, bei c treffen die Lichtstrahlen zur selben Zeit in der Mitte ein. Die Ereignisse a und b finden daher aus Sicht von I' zur selben Zeit statt und müssen somit auf der *x'*-Achse liegen. Somit kann man die *x'*-Achse einzeichnen (Abb. 25). In Abb. 26 sind aus Gründen der besseren Übersicht alle Hilfslinien und Raumschiffe weggenommen.

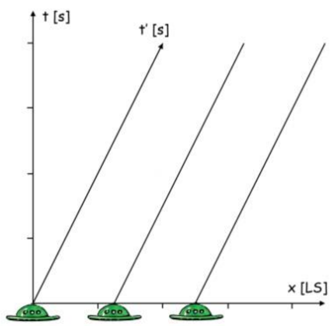

Abb. 21

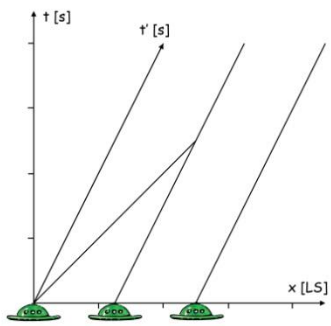

Abb. 22

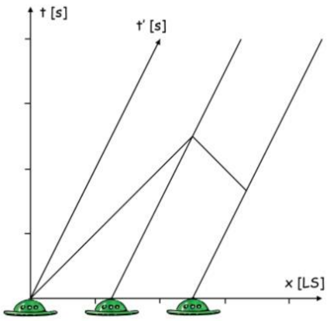

Abb. 23

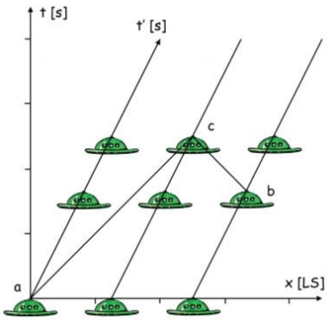

Abb. 24

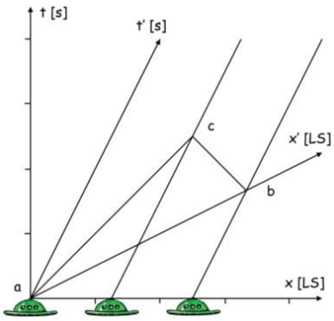

Abb. 25

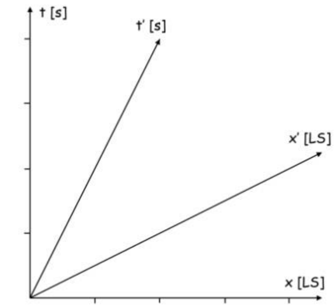

Abb. 26

(alle Grafiken Martin Apolin)

Hilfe zu A19 c: Die Winkel müssen wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gleich groß sein. Die Weltlinie eines Photons liegt ja unter 45 ° im Diagramm. In allen Systemen muss das Licht in 1 s den Weg von 1 LS zurücklegen. Die *x*- und *t*-Abschnitte müssen also für Licht in allen Systemen (I und I') immer exakt gleich groß sein. Wären die Winkel in I' nicht gleich groß, wäre das aber nicht der Fall (Abb. 27) und es wäre die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verletzt.

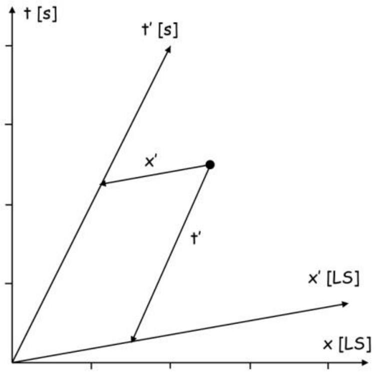

Abb. 27: Wären die Winkel zwischen *t* und *t'* sowie *x* und *x' nicht* gleich groß, wäre im System I' die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verletzt, weil z. B. wie hier *t'* deutlich größer ist als *x'* (Grafik: Martin Apolin).

Hilfe zu A20: Wenn du wissen möchtest, wie lange der Stab in I' aus der Sicht von I ist, musst du parallel zur *t*-Achse messen (Abb. 28 links). Du siehst, dass der Stab in I' kürzer ist als 1 LS. Er ist kontrahiert!
Wenn du wissen möchtest, wie lange der Stab in I aus der Sicht von I' ist, musst du parallel zur *t'*-Achse messen (Abb. 28 rechts). Du siehst auch in diesem Fall, dass der Stab in I kürzer ist als 1 LS. Er ist kontrahiert!

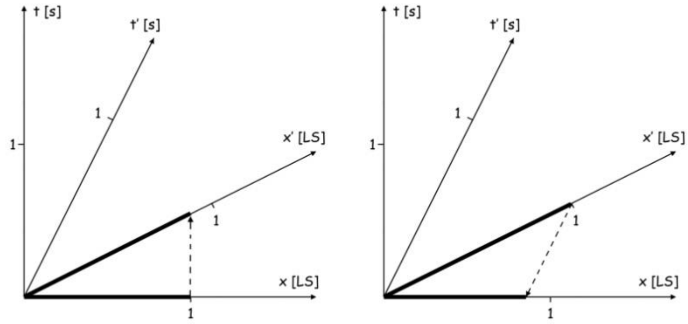

Abb. 28: In beiden Fällen ist der Stab aus der Sicht des anderen Systems kürzer (Grafiken: Martin Apolin).

Hilfe zu A21: Wenn in I' 1 s vergangen ist, ist in I bereits *mehr* als eine Sekunde vergangen (Abb. 29 links). Die Zeit in I' geht also aus der Sicht von I langsamer. Umgekehrt gilt: Wenn in I 1 s vergangen ist, ist in I' bereits *mehr* als eine Sekunde vergangen (Abb. 29 rechts). Die Zeit in I geht also aus der Sicht von I' langsamer.

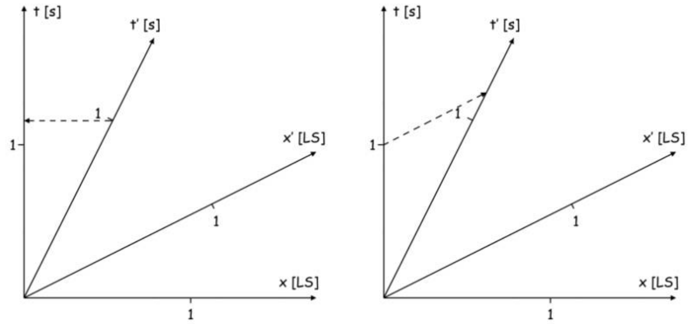

Abb. 29: In beiden Fällen vergeht die Zeit im System aus der Sicht des jeweils anderen Systems langsamer (Grafiken: Martin Apolin).