Jump-and-Reach-Test Teil 2

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung zu den Themen Impuls und Impulssatz, Kraftstoß, Energieerhaltung sowie Energieformen

Martin Apolin (Stand Dezember 2010)

Mit dem **Jump-and-Reach-Test** kann man die Hebung des **Körperschwerpunktes (KSP)** messen (siehe Kap. 5.2). Dazu stellst du dich seitlich an eine Wand und greifst so hoch wie möglich hinauf (Abb. 1). Ein Helfer markiert diese Stelle. Dann springst du aus der Hocke so hoch wie möglich hinauf. Das wird wieder markiert. Die Differenz zwischen den Markierungen ist deine **KSP-Hebung**. Sie ist von der Körpergröße unabhängig. In Tabelle 1 siehst du einige Richtwerte für „Normalsterbliche". Weltklassehochspringer kommen bei diesem Test über 1 m!

Alter	weiblich/männlich
15	34 cm / 43 cm
17	36 cm / 48 cm

Tab. 1: Richtwerte für den Jump-and-Reach-Test

Abb. 1: Durchführung des Jump-and-Reach-Tests

(Grafik: Janosch Slama; Abb. 5.12, Kap. 5).

▶**A1** Es gibt bei diesem Test aber auch Fehlerquellen, die zu Ungenauigkeiten bei der Messung führen können. Welche könnten das sein? (Anm.: Das grüne Symbol ▶ vor Fragen verweist auf den Lösungsteil)

Es gibt eine objektivere Methode, mit der man auf elegante Weise **die Hebung des KSP** indirekt ermitteln kann. Dabei wird mit Hilfe einer Kraftmessplatte der Impuls beim Absprung gemessen. Um einen Gegenstand zu beschleunigen, braucht man eine **Kraft** (Kap 8.3 und 8.4). Weil sich dabei der **Impuls** (siehe Kap. 10) ändert, kann man sagen: Zur Impulsänderung braucht man eine Kraft. Oder anders gesagt: **Kraft kann man auch als Impulsänderung pro Zeit auffassen.** Formelmäßig formuliert man das so:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

$$\text{Kraftstoß} = \boldsymbol{F}\Delta t = \Delta \boldsymbol{p} = m\Delta \boldsymbol{v}$$

Mit Hilfe von **Kraftmessplatten** lässt sich die Absprunggeschwindigkeit sehr präzise eruieren. Abb. 2 zeigt das Beispiel eines Kraftverlaufs bei einem Strecksprung. Die Skala der y-Achse wurde so gewählt, dass sie beim ruhigen Stehen null zeigt. Bei der Auftaktbewegung gibt die Person etwas in den Knien nach und der KSP wird nach unten beschleunigt (negativer Impuls). Durch die Streckbewegung entsteht eine Beschleunigung nach oben (positiver Impuls). Am Ende der Abdruckphase sinkt die Kraft unter den Ruhewert ab. Der Körper wird also noch während der Abdruckphase bereits wieder einen Tick langsamer. Um den **Nettoimpuls** nach oben zu bekommen, muss man die Flächen addieren. Die roten Flächen zählen dabei negativ. Der Nettoimpuls in unserem Beispiel beträgt 280 Ns - 102 Ns – 8 Ns = 170 Ns.

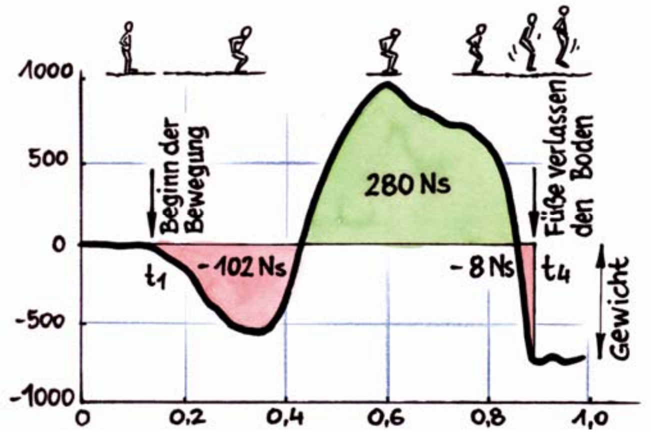

Abb. 2 Kraftverlauf bei einem Strecksprung (Grafik: Janosch Slama; Abb. 10.20, Kap. 10.4, S. 104).

Wenn man den Impuls und auch die Masse der Person kennt, kann man die exakte Abfluggeschwindigkeit berechnen und aus dieser wiederum die Flughöhe des

KSP. Diese Methode der Berechnung der KSP-Hebung mit Hilfe der Kraftstöße ist aber nicht 1:1 auf den Jump-and-Reach-Test umzulegen. Es wird hier nämlich die Flughöhe berechnet, nachdem die Kraftwerte auf null gesunken sind, also quasi die letzte Zehenspitze den Boden verlassen hat. Beim konventionellen Jump-and-Reach-Test wird aber die Hebung des KSP aus dem Stand berechnet. Der Unterschied liegt also in der Streckung der Füße. Daher liefert diese Methode Werte, die um eine Fußstreckung kleiner sind, also etwa 15 bis 20 cm (siehe auch Jump-and-Reach-Test Teil 1; Download im Kapitel 6).

Versuche nun, die Auswertung mit Hilfe der **Rohdaten** selbst Schritt für Schritt nachzuvollziehen. Diese Rohdaten befinden sich im File
Jump and Reach Rohdaten.xls. Ideal wäre es, wenn du die Daten selbst in einem Tabellenkalkulationsprogramm auswertest. Wenn das nicht möglich ist, versuche die Überlegungen und Rechnungen an Hand der Angaben selbst durchzuführen.

A2 Erstelle zunächst aus den Rohdaten eine Grafik, die den Verlauf der Kraft über der Zeit zeigt. Berechne die Zeitdaten neu, so dass diese mit null beginnen (*renormierte Zeit*), und nicht wie in den Rohdaten mit 0,5 s. Vergiss nicht, die Achsen zu beschriften! Die fertige Grafik sollte so aussehen wie Abb. 3. Die Werte zu dieser Grafik findest du im File ***Jump and Reach Auswertung.xls*** im ersten Tabellenblatt.

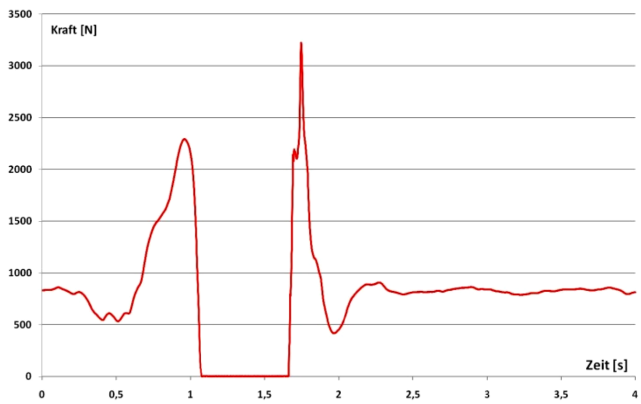

Abb. 3: Kraft-Zeit-Kurve, rekonstruiert aus den Rohdaten der Kraftmessplatte.

▶**A3** Interpretiere die Grafik. **a)** Welche Bewegungen der Person kann man welchen „Hügeln und Tälern" der Kurve zuordnen? **b)** Welches ist der Bereich des Absprungs, der für unsere Aufgabe von Bedeutung ist? **c)** An welcher Stelle der Kurve kann man das Gewicht der Person am besten ermitteln? **d)** Wie kann man die Masse der Person berechnen?

▶**A4** Die Platte weist einen **kleinen systematischen Fehler** auf. Man nennt so etwas auch einen **Offset-Fehler**. Diesen kann man in den Rohdaten erkennen. Wo? Und wie groß ist dieser Fehler etwa? Versuche, ihn mit Hilfe eines Kalkulationsprogramms zu ermitteln.

A5 Bereinige die Kraftdaten, indem du eine neue Spalte erstellst, in der alle Werte um den Offset-Fehler vermindert sind. Diese Werte sind im Excel-File in der Spalte *bereinigte Kraftwerte* im Tabellenblatt 1 zu finden.

▶**A6** Berechne nun das Gewicht der Person. Was ist das Problem dabei und wie könnte man es lösen? Wenn du das Gewicht ermittelt hast, dann berechne die Masse.

A7 Erstelle nun im Tabellenkalkulationsprogramm eine neue Spalte, in der du von den Kraftwerten das Gewicht abziehst. Diese Kraft-Werte findest du im File *Jump and Reach Auswertung.xlsx* in der Spalte *renormierte Kraft [N]*. Die Kraftkurve beginnt nun, wie auch in Abb. 2, im Bereich um 0 Newton. Zeichne eine Grafik, in der du den Zeitbereich von 0 bis 1,1 Sekunden (also den Absprung) mit diesen neuen Werten darstellst. Die Grafik sollte so ähnlich aussehen wie Abb. 4.

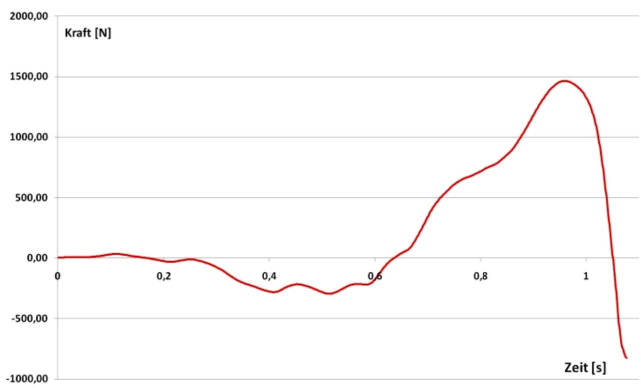

Abb. 4: Kraft-Zeit-Kurve bis zum Ende des Absprungs. Von den Originaldaten sind der Offsetfehler und das Gewicht abgezogen.

A8 Der Kraftstoß ist die Fläche unter der Kraft-Zeit-Kurve (siehe auch Abb. 2). Diese Fläche erhält man durch **Integration**. Integrieren lernst du erst in der 8. Klasse. Wir werden daher in diesem Falle den Gesamtimpuls durch **numerische Integration** berechnen (Abb. 5). Dabei bestimmt man die Fläche nicht analytisch (also nicht mit Hilfe einer Funktion), sondern numerisch, indem man diese in kleine Rechtecke zerlegt. Der x-Wert beträgt jeweils 1/1000 Sekunde (das entspricht der zeitlichen Auflösung der Platte), der y-Wert ist der jeweilige Kraftwert in dieser Zeit (*renormierte Kraft [N]*). In Tabelle 2 siehst du exemplarisch, wie man dieses Verfahren durchführt. Die Teil-Kraftstöße findest du in der Spalte *Kraftstoß [Ns]* im File. Wenn du alle diese kleinen Kraftstöße addierst, ergibt sich ein **Netto-Kraftstoß** von **251 Ns** nach oben.

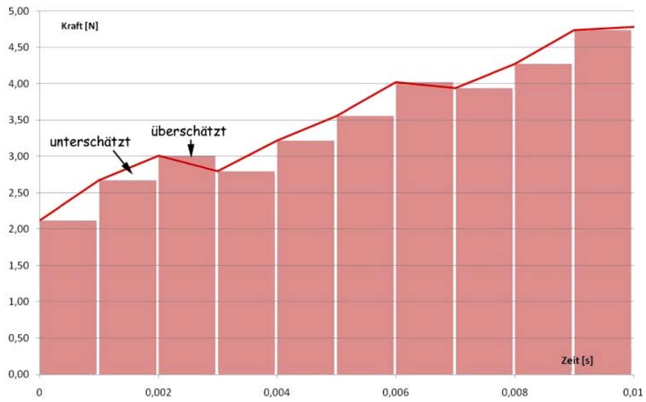

Abb. 5: Numerische Integration: Die Kurve zeigt sehr stark vergrößert die erste 1/100 s des Kraftverlaufs aus Abb. 4. Die farbigen Flächen entsprechen jeweils dem winzigen Impuls, der in 1/1000 s wirkt. Der Gesamtimpuls ergibt sich aus der Summe aller dieser Flächen. Steigt die Kurve an, wird die tatsächliche Fläche unterschätzt, sinkt sie, wird sie überschätzt. Die Fehler sind aber, vor allem bei großen Kräften, minimal und gleichen sich bei einer an- und absteigenden Kurve aus.

Renormierte Zeit [s]	renormierte Kraft [N]	Teil-Kraftstoß [Ns]
0	2,12	$2{,}12\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 2{,}12\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$
0,001	2,67	$2{,}67\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 2{,}67\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$
0,002	3,01	$3{,}01\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 3{,}01\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$
0,003	2,80	$2{,}80\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 2{,}80\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$
0,004	3,22	$3{,}22\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 3{,}22\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$
0,005	3,56	$3{,}56\ \mathrm{N}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = 3{,}56\cdot 10^{-3}\ \mathrm{NS}$

Tabelle 2: Um die Teil-Kraftstöße auszurechnen, nimmt man an, dass die Kräfte jeweils 1/1000 s wirksam sind. Das entspricht der Breite der Flächen. Die Ergebnisse in der rechten Spalte entsprechen den ersten 5 Flächen in Abb. 5.

▶**A9** Berechne aus dem eben ermittelten Wert von 251 Ns die Absprunggeschwindigkeit.

▶**A10** Damit wir nun die **Flughöhe des KSP** berechnen können, brauchen wir eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen Absprunggeschwindigkeit und Flughöhe angibt. Zu dieser kommt man zum Beispiel mit Hilfe des **Energiesatzes** (Kap. 9.6). Die Überlegung dazu ist folgende: Beim Absprung ist die potenzielle Energie E_p null, dafür ist die kinetische Energie E_k maximal. Es kann aber keine Energie verloren gehen. Die gesamte kinetische Energie muss sich daher während des Fluges des KSP bis zur größten Höhe in potenzielle Energie umwandeln. Daher kann man beide Gleichungen gleichsetzen und nach h auflösen.

▶**A11** Berechne nun die Sprunghöhe mit der in A10 abgeleiteten Formel.

▶**A12** Ein Objekt alleine kann seine Geschwindigkeit niemals ändern! Wenn man also in die Höhe springt, dann muss sich auch etwas anderes bewegen! Es klingt unglaublich, aber es ist die gesamte Erde (Abb. 6)! Nun ist aber die Masse der Erde wirklich sehr groß, und deshalb kannst du ihre Bewegung nicht bemerken. Überlege dir, wie man größenordnungsmäßig berechnen könnte, wie weit sich die Erde beim Sprung in die Gegenrichtung bewegt. Die Masse der Erde beträgt $6\cdot 10^{24}$ kg.

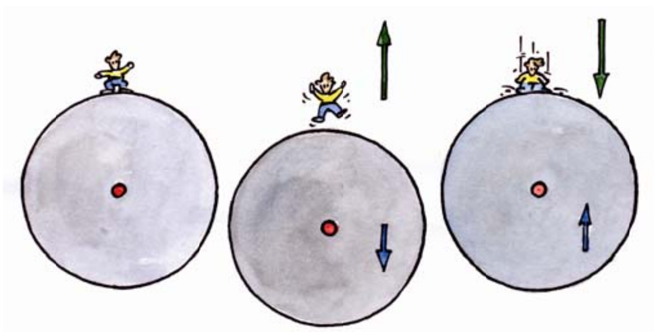

Abb. 6: Wenn du springst, dann bewegt sich die Erde – hier sehr übertrieben dargestellt – in die Gegenrichtung (Grafik: Janosch Slama; Abb. 10.5, Kap. 10.1, S. 100).

▶**A13** Welche kinetische Energie steckt der Springer beim Absprung in seinen Körper?

▶**A14** Wie lautete die Formel für die Leistung (siehe Kap. 9.5)? Was ist der Unterschied zwischen Beschleunigungsarbeit und Beschleunigungsenergie? Wie groß ist die durchschnittliche Leistung des Springers während des Absprungs? Überlege dir dazu mit Hilfe von Abb. 7 (nächste Seite), wie lange der Absprung dauert. Welche Ungenauigkeiten ergeben sich bei dieser Abschätzung?

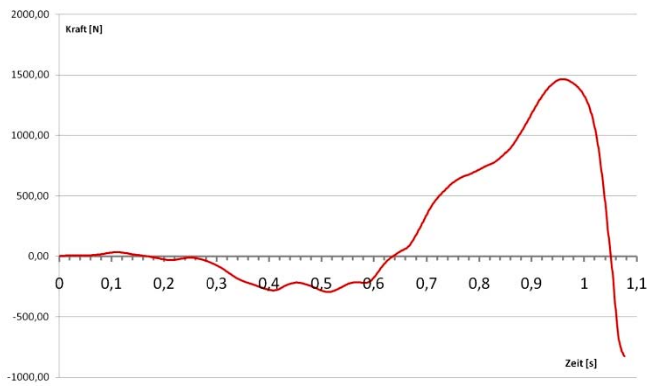

Abb. 7: Kraft-Zeit-Kurve bis zum Ende des Absprungs mit deutlich hervorgehobener x-Achse.

▶**A15** Berechne nun mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogramms die Beschleunigung des Springers über den gesamten Zeitraum (also von 0 bis 4 Sekunden). Wie kommt man von den Kraftwerten auf die Beschleunigung? Gib die Beschleunigung in m/s² und in *g* an. Überlege, bevor du die Grafik zeichnest, wie viel *g* auf den Körper wirken, wenn er sich komplett in der Luft befindet. Stelle die Kurve in einer Grafik dar. Die Lösung befindet sich im Excel-File in Tabellenblatt 2.

Hilfe und Lösungen

A1 Das Hauptproblem ist, dass man im Stand eventuell anders hinauf greift als im Sprung. Wenn man im Stand schlampig hinauf greift, beim Sprung den Arm aber ordentlich streckt, dann kann man einiges an Höhe gewinnen. Auch bei der Messung kann es zu Fehlern kommen. Günstig wäre es, die Finger vor dem Sprung in Kreidestaub zu tauchen, damit eine Markierung an der Wand bleibt.

A3 a) In Abbildung 8 siehst du, welche Phase des Sprungs man der Grafik zuordnen kann.

b) Um den Impuls ausrechnen zu können, ist nur der Bereich bis zum Absinken der Kraft auf null interessant, bis also der Körper die Platte vollständig verlassen hat.

c) Das Gewicht der Person entspricht der angezeigten Kraft in den „Ruhephasen“, also zu Beginn und am Ende des Sprungs.

d) Das Gewicht ist Masse mal Erdbeschleunigung, also . Die Masse bekommt man daher, indem man die Gewichtskraft durch die Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s²) dividiert.

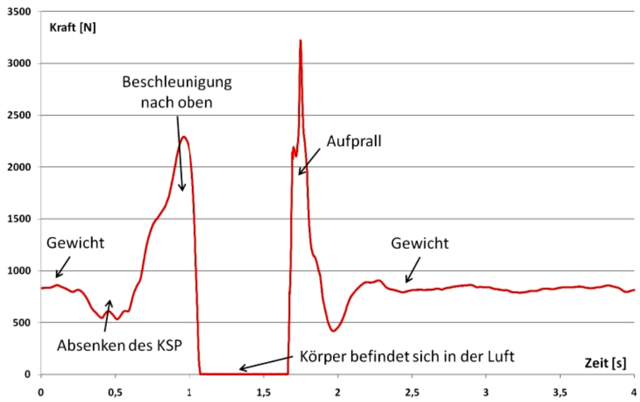

Abb. 8: Die einzelnen Phasen des Sprungs.

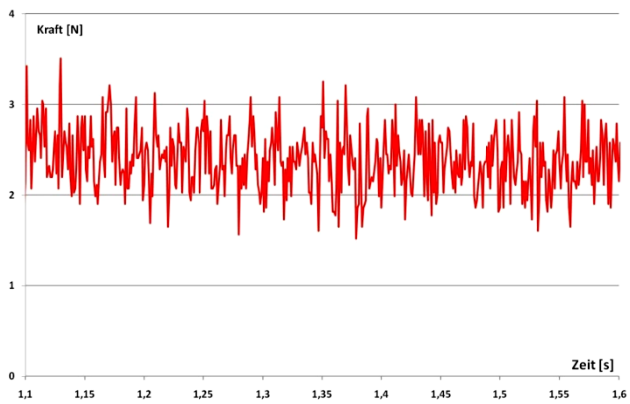

Abb. 9: Diese Grafik zeigt den Kraftverlauf in der Zeit zwischen 1,1 und 1,6 Sekunden. In dieser Zeit müsste der Wert 0 betragen, liegt jedoch im Schnitt bei rund 2,4 N.

A4 Wenn sich der Körper komplett in der Luft befindet, müsste die Platte 0 Newton zeigen. In der Vergrößerung der Zeit zwischen 1,1 und 1,6 Sekunden (Abb. 9) kannst du aber sehen, dass der Wert zwischen etwa 1,5 und 3,5 Newton schwankt. Wenn man den Durchschnittswert in dieser Zeit berechnet, kommt man auf 2,39 N. Diesen Wert zeigt die Platte immer zu viel, und er muss daher von allen Kraftwerten abgezogen werden.

A6 Der Beginn der Kurve ist durch die Auftaktbewegung verfälscht. Am besten eignet sich zur Messung des Gewichts die Zeit nach dem Aufsprung zwischen 2,5 und 4 Sekunden (siehe Abb. 8). Weil man niemals komplett ruhig stehen kann, schwankt die Kraft durch leichte Auf- und Abbewegungen jedoch leicht hin und her. Der Mittelwert in diesem Zeitraum beträgt 825,85 N. Die Masse ergibt sich aus $m = F_G/g$ = 84,18 kg.

A9 Es gilt . Daher gilt . Bei 251 Ns und einer Masse von 84,18 kg erhält man eine Absprunggeschwindigkeit von 2,98 m/s.

A10 und 11 $E_p = mgh$, $E_k = (mv^2)/2$. Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man —. Wenn man für g = 9,81 m/s² einsetzt, erhält man für die KSP-Hebung 45,3 cm.

A12 Der Gesamtimpuls von Erde und Mensch ist vor dem Sprung in Summe null. Auf Grund der Impulserhaltung muss dieser Impuls auch null bleiben. Drückt sich ein Mensch in die eine Richtung weg, dann muss die Erde einen gleich großen, aber entgegengesetzten Impuls bekommen. Der Gesamtschwerpunkt bleibt dadurch an derselben Stelle. Die Masse des Springers beträgt 84,2 kg, die Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg. Das Verhältnis ist daher $1:1{,}4 \cdot 10^{-23}$. Die Sprunghöhe beträgt 0,453 m. Wenn der Gesamtschwerpunkt an derselben Stelle bleibt, bewegt sich die Erde daher um $0{,}453\ \text{m} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-23} = 6{,}4 \cdot 10^{-24}$ m in die Gegenrichtung. Zum Vergleich: Quarks, die Bausteine der Materie, sind mit einem Durchmesser von etwa 10^{-18} etwa eine Million mal größer!

A13 Die kinetische Energie ist $E_k = (mv^2)/2$. Für 84,18 kg und eine Absprunggeschwindigkeit von 2,98 m/s ergeben sich daher 374,35 J.

A14 Es gilt Leistung ist Arbeit pro Zeit, also $P = W/t$. Die Beschleunigungsarbeit ist die Arbeit, die man für eine Beschleunigung eines Objekts investieren muss. Die kinetische Energie ist jene Energie, die der Gegenstand am Ende dieser Beschleunigung besitzt. Wenn das Objekt mit der Geschwindigkeit null startet, sind Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie zahlenmäßig gleich groß. Generell gilt: Durch Arbeit wird Energie übertragen und/oder werden Energieformen umgewandelt (siehe Abb. 10).

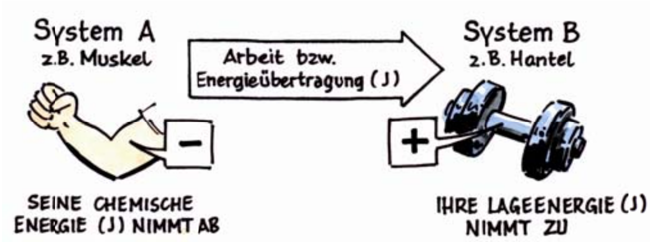

Abb. 10: Der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie (Grafik: Janosch Slama; Abb. 9.5, Kap. 9.1, S. 85).

Der Knackpunkt bei der Berechnung der Leistung ist die Festlegung der Dauer des Absprungs. Das ist in gewisser Weise Geschmackssache, weil die Kraft von Beginn an etwas hin und her schwankt. In unserem Fall erscheint es sinnvoll, den Absprung zwischen 0,25 und 1,1 s (t = 0,85 s) anzunehmen. Für die durchschnittliche Leistung ergeben sich dann 440 W.

A15 Die Bewegungsgleichung (siehe Kap. 8.3, S. 74) lautet $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$. Man kommt daher von den Kraftwerten auf die Beschleunigung, wenn man die Kraft durch die Masse dividiert. Das ist in der Abbildung unten dargestellt. Wenn man die Werte in g darstellt, ergibt sich dieselbe Kurve. Allerdings sind die Werte der y-Achse um den Faktor 10 kleiner (weil g rund 10 m/s² ist). Während der Flugphase ist die einzige Beschleunigung die Erdbeschleunigung. Weil diese nach unten zeigt, beträgt sich -9,81 m/s². Die kleinen Schwankungen ergeben sich durch die Ungenauigkeit der Platte.

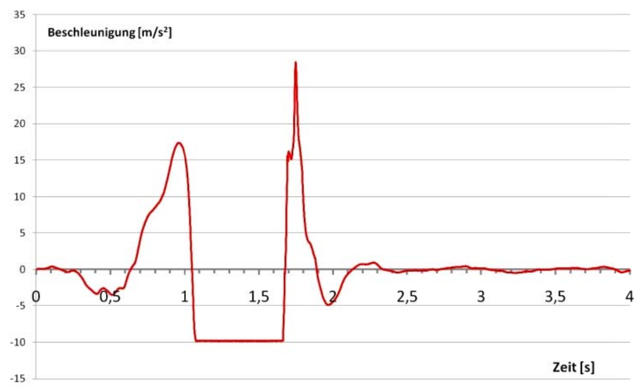

Abb. 11: Die Beschleunigung während des gesamten Versuchs.