

Thema: Gesetz der großen Zahlen		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad:	Klasse:

Wird ein Zufallsexperiment immer unter denselben Bedingungen durchgeführt, so nähert sich die relative Häufigkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses immer weiter der theoretischen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses an.

Der Schweizer Mathematiker und Physiker Jacob Bernoulli (1655 – 1705) formulierte diesen „goldenen Satz“ (theoremum aureum) in einer seiner Publikation wie folgt:

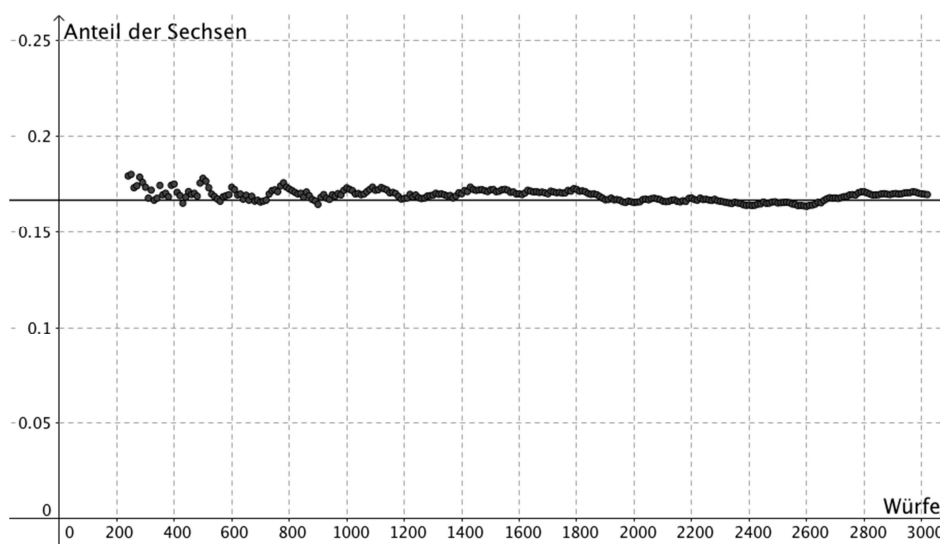
Ist A das Ereignis eines Zufallsexperiments, so stabilisieren sich bei einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen dieses Experiments die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$.

Man spricht in diesem Zusammenhang vom **empirischen Gesetz der großen Zahlen**.

Betrachtet man z.B. das Werfen eines fairen Würfels¹, ist nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Sechsz $\frac{1}{6}$ (nach Pierre Simon de Laplace: $\frac{\text{Anzahl der für dieses Experiment günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller möglichen Ausgänge}}$).

Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt: je häufiger der Würfel geworfen wird, desto näher wird der relative Anteil der Würfe $h_n(A)$, bei denen eine Sechsz auftritt, beim theoretischen Wert $P(A) = \frac{1}{6}$ liegen.

Durch eine Simulation kann diese Annäherung veranschaulicht werden, wobei die waagrechte Linie dem Wert $\frac{1}{6}$ entspricht.



Diese anschauliche Umschreibung des Stabilwerdens der relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ lässt sich auch mathematisch exakt erfassen. $h_n(A)$ kann als Zufallsvariable aufgefasst werden, für deren Stabilwerden dann gelten muss:

1) der Erwartungswert $E(h_n(A)) = P(A)$

2) die Streuung von $h_n(A)$ ist null

¹ Ein Würfel wird als fair bezeichnet, wenn jede Augenzahl mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt.



Das Zufallsexperiment wird nun n -mal unabhängig voneinander durchgeführt und man beobachtet, ob das Ereignis A eintritt oder nicht. Es handelt sich dabei um ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $P(A) = p$.

Gibt die Zufallsgröße X die zufällige Anzahl der Erfolge an, lässt sich $h_n(A)$ als Zufallsgröße $\frac{1}{n} \cdot X$ auffassen.

Da X eine binomialverteilte Zufallsvariable ist, gilt:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Daraus folgt für $h_n(A)$ unter Anwendung der Rechenregeln² für den Erwartungswert und die Varianz:

$$E(h_n(A)) = E\left(\frac{1}{n} \cdot X\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p = P(A)$$

$$V(X) = V\left(\frac{1}{n} \cdot X\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(X) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{1}{n} \cdot p \cdot (1 - p)$$

Strebt die Anzahl n der Versuche gegen unendlich, gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot p \cdot (1 - p) = 0$

Die geforderten Bedingungen sind somit auch mathematisch exakt begründet.

Es bleibt noch zu klären, was eine genügend große Anzahl n von Versuchen darstellt.

Die Wahrscheinlichkeit β , dass die Abweichung der relativen Häufigkeit $h_n(A)$ von der theoretischen Wahrscheinlichkeit $P(A)$ kleiner als ein noch so kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wird, soll sehr groß werden (z.B. $\beta = 0,99$). D.h. es soll $P(|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon) \geq \beta$ sein.

Unter Anwendung der tschebyscheffschen³ Ungleichung ergibt sich für die Anzahl der Versuche $n = \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot \beta}$.

Soll z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung der relativen Häufigkeit von der theoretischen Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,01 wird, 99% übersteigen, müssen rund $n = \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot \beta} = \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,99} \approx 2526$ Versuche durchgeführt werden.

² Lineartransformation für den Erwartungswert und die Varianz: $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$; $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$

³ Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow, 1821-1894, russischer Mathematiker

