Ich kann die Begriffe „Halbwertszeit und Verdoppelungszeit“ erklären sowie kontextbezogen berechnen.

B, C **1** Ein Breitband-Internetanbieter hat derzeit 5400 Kundinnen und Kunden. Aufgrund von Marktanalysen geht das Unternehmen davon aus, dass der Kundenstamm in den kommenden Jahren um durchschnittlich 5% pro Jahr vergrößern werden kann. Die Anzahl der Kundinnen und Kunden des Unternehmens kann mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden.

a. Erkläre, was der Begriff „Verdoppelungszeit“ in diesem Kontext bedeutet.

b. Die Funktion, die die Anzahl K(t) an Kundinnen und Kunden in t Jahren beschreibt, ist K mit $K(t) = 5400 \cdot 1{,}05^t$. Berechne die Verdoppelungszeit.

B, C **2** Der Zerfallsprozess des radioaktiven Elements Radon 222 kann mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden, die jedem Zeitpunkt t die vorhandene Menge N(t) an strahlendem (das heißt: nicht zerfallenem) Material zuordnet. Pro Stunde nimmt die strahlende Menge um etwa 0,76% ab. Die zu Beginn vorhandene Menge an radioaktivem Material wird mit N_0 bezeichnet.

a. Erkläre, was der Begriff „Halbwertszeit“ in diesem Kontext bedeutet.

b. Die Funktion, die die vorhandene Menge N(t) an strahlendem Material nach t Stunden beschreibt, ist N mit $N(t) = N_0 \cdot 0{,}9924^t$. Berechne die Halbwertszeit.

C **3** Es ist b eine beliebige reelle Zahl größer als 1. Ergänze die Aussage so, dass sie richtig ist.

Für eine Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a > 1$ ist die …	
Für eine Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ mit $0 < a < 1$ ist die …	

A	Halbwertszeit $T = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(b)}$.
B	Halbwertszeit $T = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$.
C	Verdoppelungszeit $T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$.
D	Verdoppelungszeit $T = \frac{\ln(a)}{\ln(2)}$.

B, D **4** Der Wert zweier Kapitalien nach t Jahren kann mit den Exponentialfunktionen K_1 und K_2 mit $K_1(t) = 1000 \cdot 1{,}02^t$ und $K_2(t) = 900 \cdot 1{,}05^t$ beschrieben werden.

a. Überlege und argumentiere, für welches Kapital die Verdoppelungszeit geringer ist.

b. Berechne jeweils die Verdoppelungszeit für K_1 und K_2.

A, B **5** Der Abbauprozess eines Medikamentes im menschlichen Körper kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Dabei ist N_0 die eingenommene Medikamentenmenge und N(t) jene Menge des Medikaments, die t Stunden nach der Einnahme noch im Körper vorhanden ist (in mg). Medizinische Untersuchungen haben ergeben, dass eine Stunde nach der Einnahme noch etwa 94% des Medikaments im Körper vorhanden sind.

a. Finde die Exponentialfunktion N, die jedem Zeitpunkt t (in Stunden) die noch im Körper vorhandene Medikamentenmenge N(t) zuordnet.

b. Berechne die Halbwertszeit des Medikaments.

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann die Begriffe „Halbwertszeit und Verdoppelungszeit“ erklären sowie kontextbezogen berechnen.

1 **a.** Die Verdoppelungszeit ist jene Zeitdauer (in Jahren), nach welcher der Internetanbieter seinen Kundenstamm verdoppelt hat.

b. Verdoppelungszeit: $t = 14{,}2$ Jahre.

2 **a.** Die Halbwertszeit ist jene Zeitdauer (in Stunden), nach der nur noch die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Menge an Radon 222 vorhanden ist (bzw., jene Zeit, nach der bereits die Hälfte des strahlenden Materials zerfallen ist).

b. Halbwertszeit: $t = 90{,}86$ Stunden [Löse $\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot 0{,}9924^t$ nach t.]

3

Für eine Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a > 1$ ist die …	C
Für eine Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ mit $0 < a < 1$ ist die …	B

4 **a.** Die Verdoppelungszeit ist umso kürzer, je schneller der Wert des Kapitals wächst. Die Geschwindigkeit des Kapitalwachstums ist durch die Wachstumskonstante festgelegt. Das heißt, jenes Kapital mit der größeren Wachstumskonstante steigert seinen Wert schneller. Da K_2 die größere Wachstumskonstante hat ($1{,}05 > 1{,}02$), hat K_2 eine kürzere Verdoppelungszeit.

b. Verdoppelungszeit für K_1: 35 Jahre.
Verdoppelungszeit für K_2: 14,2 Jahre.

5 **a.** $N(t) = N_0 \cdot 0{,}94^t$ (N_0, N(t) in mg, t in Stunden)

b. Halbwertszeit: 11,2 Stunden [Löse $\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot 0{,}94^t$ nach t.].

Autorin: Bettina Ponleitner