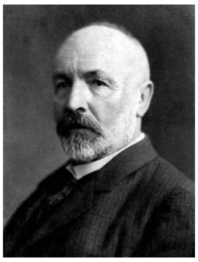
Von abzählbar bis überabzählbar



Georg Cantor (1845 - 1918) gilt als Erfinder der Mengenlehre. Er war vom Thema „Unendlichkeit“ außerordentlich fasziniert und ist bei seinen Überlegungen auf faszinierende Erkenntnisse über die Unendlichkeit gestoßen.

Der folgende Vertiefungspfad führt dich in einen unglaublichen Teil der Unendlichkeit. Du wirst in Tiefen gelangen, in die man ohne Mathematik nie vordringen könnte.
Du wirst folgende Fragen klären:
„Gibt es mehr ganze Zahlen als natürlich Zahlen“ und „Gibt es noch mehr als unendlich viele?“

Was heißt „gleichviel“?

Du denkst vielleicht: „Blöde Frage! Weiß doch jeder, was das bedeutet! Einfach abzählen!“. Im Alltag hast du da sicher Recht. Will man zum Beispiel wissen, ob es in einer Schule gleich viele Schülerinnen und Schüler gibt, so kann man das durch Abzählen recht leicht feststellen.
Aber wir dürfen nicht vergessen, dass unser Ziel die Unendlichkeit ist. Und da ist das Abzählen eine eher zeitraubende Methode; man wird ja nie fertig mit dem Zählen!!

Also musste sich Cantor eine andere Methode überlegen und führte ein paar neue Vokabeln ein.
Die Anzahl der Elemente einer Menge nannte er „Mächtigkeit“ der Menge und statt des Wortes „gleichviel“ führte er den Begriff „gleichmächtig“ ein.

Dann definierte er den Begriff „gleichmächtig“ auf „mathematisch“:

> „Eine Menge A heißt gleichmächtig zu einer Menge B, wenn es eine Bijektion f: $A \to B$ gibt.“

Für alle denen das zu kompliziert ist: Das heißt in etwa:

> „Zwei Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man mit ihren Elementen Pärchen bilden kann und kein Element übrigbleibt.“

Überleg dir jetzt gut, ob du Cantors Definition zustimmen kannst, denn diese Definition ist der Schlüssel zu allen weiteren Überlegungen.

Will man also wissen, ob es in einer Schule gleich viele Schülerinnen und Schüler gibt, dann kann man das mit Hilfe der Cantor´schen Definition feststellen. Man bildet Pärchen aus jeweils einem Schüler und einer Schülerin und, wenn kein Schüler und keine Schülerin übrig bleiben, dann haben die Schülerinnen-Menge und die Schüler-Menge gleich viele Elemente - die Mengen sind gleichmächtig.

An diesem Beispiel erkennt man schon die Genialität der Cantor´schen Definition: Man muss nicht zählen um festzustellen, ob zwei Mengen gleichviele Elemente haben! Und das wird der Schlüssel zum Erfolg werden, wenn wir die Gleichmächtigkeit von unendlichen Mengen feststellen wollen.

Von abzählbar bis überabzählbar

Versuchen wir gleich das erste Problem zu lösen:

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Bevor du weiterliest, versuche einmal ein bisschen selbst über diese Frage nachzudenken………………

Wenn du nachgedacht hast, dann wirst du vielleicht gemerkt haben: Das Problem ist nicht so einfach zu lösen.

Denn einerseits sind ja die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$) schon unendlich viele. Ist es überhaupt möglich, dass die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$) **mehr als unendlich viele** Elemente hat?
Andererseits besteht die Menge der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen und dann kommen noch alle negativen ganzen Zahlen dazu, also gibt es doch mehr ganze als natürliche Zahlen?

Georg Cantor löst diese verzwickte Situation auf, indem er sich an seine Definition von „gleichviel" hält. Wenn es gelingt, aus den Elementen der natürlichen Zahlen und den Elemente der ganzen Zahlen Pärchen zu bilden, sodass man sich sicher sein kann, dass keine natürliche und keine ganze Zahl übrig bleibt, dann sind die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig.

Und das gelingt Cantor mit nebenstehender Pärchenbildung (Zuordnung):

Elemente von $\mathbb{N}$	„bildet ein Pärchen mit" = „→"	Elemente von $\mathbb{Z}$
0	→	0
1	→	-1
2	→	1
3	→	-2
4	→	2
5	→	-3
u.s.w.		u.s.w.

Man kann sich vorstellen, wie diese Pärchenbildung weitergeht. Man erkennt, dass jede natürliche Zahl mit einer ganzen Zahl ein Pärchen bildet und dass keine einzige ganze Zahl übrig bleiben wird. Daraus folgt nach der Cantor´schen Definition:

Es gibt genauso viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen.

Übungen:

Beantworte die folgenden Fragen und argumentiere deine Antwort.

1) Gibt es mehr natürliche Zahlen als gerade Zahlen?
2) Gibt es mehr einstellige oder mehr zweistellige natürliche Zahlen?
3) Gibt es mehr natürliche Zahlen, die durch zehn teilbar sind, oder mehr natürliche Zahlen, die durch tausend teilbar sind?

Von abzählbar bis überabzählbar

Gibt es mehr Bruchzahlen als natürliche Zahlen?

Wenn du dir ein wenig Zeit nimmst, um selbst über diese Frage nachzudenken, wirst du sicher bemerken, dass diese Frage noch ein Stückchen schwieriger zu beantworten ist. Es scheint nahezu unmöglich eine Zuordnung (Pärchenbildung) zwischen den natürlichen Zahlen und den rationalen Zahlen (Bruchzahlen) zu finden.
Georg Cantor ist es allerdings gelungen eine solche Pärchenbildung zu finden. Wir werden diese genial einfache Idee Cantors an den positiven rationalen Zahlen (Bruchzahlen) nachvollziehen:

Das Cantor´sche Diagonalverfahren:

Cantor entwirft zunächst nebenstehende Tabelle, in der mit Sicherheit alle positiven Bruchzahlen an irgendeiner Stelle vorkommen.
Die Bruchzahl $\frac{6}{5}$ kommt zum Beispiel in der 6.Spalte und in der 5 Reihe vor und die Bruchzahl $\frac{15}{11}$ wird in der 15.Spalte und in der 11. Reihe in dieser Tabelle aufscheinen.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**u.s.w.**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	…
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	…
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	…
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	…
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	…
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	…
u.s.w	…	…	…	…	…	…	…

Als Nächstes zeichnet Cantor einen Weg ein, der ihn sicher von einer Bruchzahl zur nächsten führt. Dieser Weg ist diagonal (deswegen „Diagonalverfahren") angeordnet und führt mit Sicherheit an jeder Bruchzahl vorbei. Bruchzahlen, die man kürzen kann, lässt man einfach aus, da sie ja schon vorgekommen sind (z.B kann man die Bruchzahl $\frac{2}{4}$ weglassen, da sie ja den gleichen Wert wie $\frac{1}{2}$ hat). Wir haben die kürzbaren Brüche in der Tabelle weggelassen.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**u.s.w.**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	…
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		…
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		…
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$		…
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$	…
6	$\frac{1}{6}$				$\frac{5}{6}$		…
u.s.w	…	…	…	…	…	…	…

Von abzählbar bis überabzählbar

Wenn man nun die Bruchzahlen entlang des Weges der Reihe nach den natürlichen Zahlen zuordnet (man zählt die Bruchzahlen also ab), so erhält man eine Pärchenbildung, bei der sicherlich weder eine natürliche Zahl noch eine Bruchzahl übrigbleibt.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Q}$
1	$\longleftrightarrow$	1
2	$\longleftrightarrow$	2
3	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}$
4	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{3}$
5	$\longleftrightarrow$	$\frac{3}{1}$
u.s.w......		u.s.w......

Es gibt also genauso viele Bruchzahlen wie natürliche Zahlen. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind also gleichmächtig.
Man nennt die Anzahl ihrer Elemente „abzählbar unendlich“.

<u>**Übungen:**</u>

1) Finde ein „Diagonalverfahren“, das auch die negativen Bruchzahlen und die Zahl null (also ganz $\mathbb{Q}$) mit einbezieht.
2) Ist die Menge der Bruchzahlen mit dem Nenner 4 abzählbar unendlich? Begründe deine Antwort.
3) Gibt es mehr rationale Zahlen als ganze Zahlen? Begründe deine Antwort.

Von abzählbar bis überabzählbar

Gibt es mehr irrationale Zahlen als natürliche Zahlen?

Nachdem wir nun erkannt haben, dass die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ alle gleichmächtig sind, also gleich viele Elemente haben, könnte man ja annehmen, dass - wie schon anfangs vermutet- keine Anzahl größer sein kann als unendlich.
Aber Georg Cantor hält eine neue Überraschung für uns bereit!
Betrachten wir zunächst einmal nur die irrationale Zahlen im Intervall $]0;1[$. Das sind also alle Dezimalzahlen, die mit „0,…“ beginnen, unendlich viele Dezimalstellen haben und nicht periodisch sind. Cantor ändert seine bewährte Vorgangsweise.Er überlegt Folgendes: Angenommen jemand behauptet, er habe eine Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den irrationalen Zahlen gefunden und legt auch gleich eine Zuordnungsliste vor, zum Beispiel folgende:

$\mathbb{N}$		irrationale Zahlen zwischen 0 und 1
1	⟷	0,130472…..
2	⟷	0,250190……
3	⟷	0,314156……
4	⟷	0,314151……
5	⟷	0,123456…..
u.s.w……		u.s.w……

Nun könnte man eine irrationale Zahl x folgendermaßen konstruieren: x beginnt mit 0,…. und unterscheidet sich in der ersten Dezimalstelle von der ersten Zahl auf der Liste. x darf also an der ersten Dezimalstelle nicht die Ziffer 1 haben.
x könnte also so beginnen: x= 0,5……
Die zweite Dezimalstelle von x darf nicht mit der zweiten Dezimalstelle der zweiten Listenzahl übereinstimmen.
x könnte also so aussehen: x=0,56……..
Die dritte Dezimalstelle von x darf nicht mit der dritten Dezimalstelle der dritten Listenzahl übereinstimmen und so weiter.
x könnte also so aussehen: x=0,56301…..u.s.w

Diese Zahl x kommt in der vorgelegten Liste sicher nicht vor, da sie sich von jeder Listenzahl zumindest in einer Dezimalstelle unterscheidet. Die Liste ist also sicher unvollständig. Jede vorgelegte Liste ist also sicher unvollständig! Das heißt nichts anderes als:

Es gibt im Intervall $]0;1[$ mehr irrationale Zahlen als natürliche Zahlen.

Da das betrachtete Intervall nur ein kleiner Ausschnitt aus allen reellen Zahlen ist, hat Cantor durch diese Überlegungen Folgendes zeigen können.

Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen. Die Menge $\mathbb{R}$ ist mächtiger als die Menge $\mathbb{N}$.
Man nennt die Anzahl der reellen Zahlen überabzählbar unendlich.

Es gibt also größere und kleinere Unendlichkeiten in der Zahlenwelt!

Passendes im Internet:

- Die Mächtigkeit der Zahlenmengen: https://www.youtube.com/watch?v=9RRwUajTu0U
- Georg Cantor Song: https://www.youtube.com/watch?v=QUP5Z4Fb5k4