

Mathematik verstehen 2

Zurück aus den Ferien

Das nicht nummerierte Einstiegskapitel steht außerhalb des Lehrstoffs und bietet den Lernenden die Möglichkeit, das Gelernte aus dem vergangenen Schuljahr zu wiederholen und zu festigen. Die Aufgaben 1 bis 12 stellen Sachsituationen aus den Ferien in den Mittelpunkt, wobei verschiedene mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zum Lösen erforderlich sind. In diesem Sinn wird darüber hinaus die Lesefähigkeit und -fertigkeit bei den Schülerinnen und Schülern trainiert. Die Lernenden kommen bei den weiteren Aufgaben in diesem Kapitel mit vielfältigen Aufgabenformaten in Berührung, die sie in weiterer Folge begleiten werden, zB Aufgaben zum Ausfüllen, Multiple-Choice-Aufgaben, Textaufgaben, einfache Rechenaufgaben, Lückentexte, Zuordnungsaufgaben etc.

Die weiteren Kapitel sind durchnummeriert. Die Aufgabennummern sind so konzipiert, dass die jeweilige Kapitelnummer vor dem Punkt erkennbar ist, zB im Kapitel 1 Aufgaben wie 1.72, im Kapitel 2 Aufgaben wie 2.46 usw. Dies hat den Vorteil der besseren Orientierung und Zuordnung im Lehrbuch bereits anhand der Aufgabennummern und im Unterricht beim Angeben von Schul- und vor allem Hausübungsaufgaben.

1 Teiler und Teilbarkeit

Während der Begriff des Vielfachen einer natürlichen Zahl bereits in der 5. Schulstufe thematisiert worden ist, hat der Teiler einer natürlichen Zahl lediglich beim Dividieren und dem Deuten dieser Grundrechenart eine Rolle gespielt. Im Hinblick auf das Rechnen mit Zahlen in Bruchdarstellung und mit Termen ist eine genaue Behandlung des Teilers und der Teilbarkeit natürlicher Zahlen von großer Bedeutung. Eine Verbindung zur Division steht am Anfang des Kapitels, nachdem eine Vorstellung des Aufteilens und des Anordnens entwickelt worden ist. Die Unterscheidung zwischen echten und unechten Teilern hat in erster Linie klassifizierende Relevanz, ist jedoch für das Bilden von Teilmengen und den Umgang mit Primzahlen auch nicht unerheblich. Ganz bewusst bekommt der Teiler die Variable t und die zu teilende Zahl die Variable z zugeordnet, damit den Lernenden dadurch bereits eine Brücke zum besseren Merken mancher Regeln geboten wird. Dass sogleich zu den Vielfachen einer natürlichen Zahl eine Vernetzung aufgebaut wird, ist eine Selbstverständlichkeit. Die Lernenden werden bereits in diesem Abschnitt an vielfältige Aufgabenformate herangeführt und mit allen Handlungsbereichen konfrontiert.

Im Abschnitt zu den Teilbarkeitsregeln werden anhand von altersadäquaten Grundvorstellungen die grundlegenden Regeln zur Teilbarkeit (Summenregel, Differenzregel, Vielfachenregel) entwickelt, bevor die einzelnen Teilbarkeiten durch 2, 5, 10, 3, 9, 4 und 6 erarbeitet werden. Bei den Formulierungen der einzelnen Teilbarkeitsregeln wird am Anfang jeder Regel vielleicht das Adverb „nur“ auffallen. Dieses ist absolut notwendig, da ohne dieses Wort die Ausschließlichkeit der Regel nicht gewährleistet ist. Weitere Regeln für die Teilbarkeit durch 25, 50, 100 und 1000 sollen von den Lernenden in Aufgaben erarbeitet werden.

Der größte gemeinsame Teiler wird einerseits anhand des Aufstellens und kritischen Betrachtens von Teilmengen vorgezeigt, andererseits anhand des euklidischen Algorithmus (grafisch und rechnerisch), der auf verständlichem Weg den Schülerinnen und Schülern bei der Grundvorstellung des ggT sehr entgegenkommt. Beim Anschreiben wird daher die größere Zahl vor der kleineren angeführt, zB $\text{ggT}(96; 36) = 12$, damit die Idee des Dividierens zur Geltung kommt. Mit dem Verstehen des euklidischen Algorithmus wird nebenbei ein Grundstein zum Verstehen der elementaren Zahlentheorie gelegt. Darauf aufbauend wird das kleinste gemeinsame Vielfache in ähnlicher Weise vorgeführt und entwickelt.

Obwohl die Primzahlen keine Bedingung für die Erfüllung des Lehrplans darstellen, sollen sie dennoch mit allen wesentlichen Eigenschaften eingeführt werden. Dazu gehören die Definition, welche die Lernenden erarbeiten sollen, die Primfaktorenzerlegung sowie die Kenntnis darüber, wie viele Primzahlen es gibt. Ergänzend bietet das Lehrwerk natürlich auch die Verfahren zum Ermitteln des ggT und des kgV mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung an, weist aber explizit darauf hin, dass diese Methode vor allem dann sinnvoll ist, wenn der ggT bzw. das kgV von mehr als zwei Zahlen gesucht wird.

2 Zahlen in Bruchdarstellung und Dezimaldarstellung

Ein wesentlicher Aspekt dieses Kapitels ist es, dass Schülerinnen und Schüler anhand von grundlegenden Aufgaben eine Vorstellung entwickeln, Zahlen auf unterschiedliche Weise darstellen zu können. Hauptaugenmerk liegt naturgemäß auf der Bruchdarstellung von Zahlen, da Rechenregeln in der 5. Schulstufe weitgehend und ganz bewusst außer Acht gelassen worden sind. Möglicherweise sind Zahlen in Bruchdarstellung auch aus Zeitgründen noch nicht sehr detailliert behandelt worden. Daher wird vieles aus dem vergangenen Schuljahr gleich am Anfang des Kapitels wiederholt. Die Intensität der Wiederholung im Unterricht hängt ganz davon ab, wie ausführlich in der 5. Schulstufe auf die Bruchdarstellung von Zahlen eingegangen worden ist. Sollte sie fast gar nicht behandelt worden sein, ist der Einführungsabschnitt 2.1 eine gute Möglichkeit, dies gründlich aufzuarbeiten.

Anhand von klaren Musteraufgaben wird das Erweitern von Brüchen und auch das Kürzen von Brüchen veranschaulicht. Die ersten Formeln dazu dienen dem Umsetzen in konkreten Anwendungsfällen, sie gewährleisten auch, dass die Lernenden auf die Voraussetzungen für diese Verfahren aufmerksam gemacht werden. Essentiell ist es hierbei, den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, dass nur Brüche, dh. Zahldarstellungen, erweitert oder gekürzt werden können, nicht Zahlen, denn diese verändern sich durch diese Verfahren ja nicht.

Der folgende Abschnitt stellt die Bruchdarstellung und die Dezimaldarstellung sowie die Überführung von der einen in die andere Darstellungsform in den Mittelpunkt. Eine zusätzliche Hilfe vermittelt die Darstellung mit dekadischen Einheiten. Bei der Umformung von einer Bruch- in die Dezimaldarstellung ist es unabdingbar, die periodische Dezimaldarstellung zu thematisieren. Hier führt das Lehrwerk mit mehreren Musteraufgaben und kleinteiligen Erklärungen behutsam auf diese neue Form der Zahldarstellung hin. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass nicht von „periodischen Dezimalzahlen“ die Rede ist, sondern von der periodischen Dezimaldarstellung einer Zahl; denn die Lernenden können bereits in den Musteraufgaben erkennen, dass es sich hierbei um keine neue Art von Zahlen handelt, sondern lediglich um solche, die problemlos in Bruchdarstellung angeschrieben werden können und in Dezimaldarstellung eben eine Besonderheit aufweisen.

Auch beim Ordnen und Vergleichen von Zahlen stehen die Bruchdarstellung und die Dezimaldarstellung als Mittel zum Zweck im Vordergrund. Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass je nach Situation einmal die eine, einmal die andere Darstellung Vorteile beim Rechnen und bei der Deutung bringt. Zahlen beider Darstellungen können auf dem Zahlenstrahl hier und da durch dieselbe Markierung angezeigt werden.

Ein kurzer, aber wesentlicher Abschnitt widmet sich der Angabe von Verhältnissen. Bereits in der 5. Schulstufe ist dieser Bereich im Umgang mit dem Maßstab behandelt worden. Die Verhältnisgleichung und die Bruchgleichung stellen eine essentielle Brücke zwischen den geometrischen Vorstellungen des vergangenen Schuljahres und den Anwendungen in der Prozentrechnung in der 6. Schulstufe sowie den Bruchtermen in der 7. und 8. Schulstufe her. Von großer Bedeutung sind daher die Unterschiede zwischen dem Verhältnis zB zweier Längen, dem Mischungsverhältnis und den Anteilen eines solchen Mischungsverhältnisses. Die Aufgaben in diesem Abschnitt stellen ganz bewusst einfache Veranschaulichungen in den Mittelpunkt des Erarbeitens.

Während in der 5. Schulstufe die Beschäftigung mit Grundrechenarten hinsichtlich der Zahlen in Bruchdarstellung auf rein intuitiver Basis erfolgt ist, werden in den folgenden Abschnitten die dafür notwendigen Rechenregeln thematisiert. Aber auch hier wird immer wieder auf die Dezimaldarstellung verwiesen, die verdeutlicht, dass es sich jeweils um die gleichen Zahlen handelt, und die häufig als Rechenkontrolle herangezogen werden kann. Beim Addieren und Subtrahieren wird die Notwendigkeit eines gleichen Nenners deutlich hervorgehoben. Bei der Multiplikation werden die Deutungen als verkürzte Addition sowie die Von-Deutung wiederholt, die bei der Prozentrechnung und statistischen Belangen noch eine wichtige Rolle einnehmen wird; zudem sollen die Unterschiede zwischen dem Multiplizieren einer Zahl mit n und dem Erweitern eines Bruches mit n ganz deutlich herausgestrichen werden. Auch bei der Division sollte explizit auf die Unterschiede zwischen dem Dividieren einer Zahl durch n und dem Kürzen eines Bruches durch n hingewiesen werden.

Im letzten Lernabschnitt sollen alle Grundrechenarten auch mit Bedacht auf die Vorrangregeln noch einmal wiederholt und gefestigt werden. Der Form des Doppelbruchs wird in diesem Abschnitt ein Unterpunkt gewidmet, auf viele Übungsaufgaben hierzu wird bewusst verzichtet, da es sich nur um eine weitere Darstellungsform einer Division zweier Zahlen in Bruchdarstellung handelt, die jederzeit als solche anschreibbar ist.

3 Zahlen in Prozentdarstellung

Der Einstieg in die Prozentrechnung erfolgt anhand einer Gruppenarbeit, die sich mit der Zusammensetzung von Lebensmitteln auseinandersetzt. Dieser Alltagsbezug für die Lernenden wird grafisch so aufbereitet, dass die Zahl 100 im Vordergrund steht, ohne dass noch der Begriff Prozent erwähnt wird. Auch die zweite Einstiegsaufgabe setzt auf einen Anteilsbegriff, der zunächst intuitiv, dann auf Basis der Vergleichszahl 100 erfolgen soll. In den vorgerechneten Aufgaben wird ausführlich dargelegt, welchen Vorteil die Vergleichszahl 100 bei verhältnismäßigen Angaben hat. Die Lernenden kommen hierbei an Zahlen in Bruchdarstellung mit dem Nenner 100 nicht vorbei, sodass hierfür eine neue Darstellung, die Prozentdarstellung, wie selbstverständlich eingeführt wird.

Ganz wesentlich für das Verständnis des Rechnens mit Prozenten ist es, dass die Schülerinnen und Schüler in den Darstellungen 1%, $\frac{1}{100}$ und 0,01 dieselbe Zahl erkennen. Dies ist nicht nur für die Grundvorstellung von Prozenten unabdingbar, sondern auch für das Lösen der diversen Prozentaufgaben. Weiters soll dadurch auch vermittelt werden, dass Angaben größer als 100 % offensichtlich möglich sind, da es ja auch Zahlen gibt, die größer als $\frac{100}{100}$, also größer als 1 sind. Somit liegt das Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt ganz auf dem Erfassen einer weiteren Möglichkeit der Zahldarstellung. Der Unterabschnitt zum Begriff Promille und somit zur Vergleichszahl 1 000 kann gleich im Anschluss erfolgen, aber auch erst am Schluss des Kapitels zur Prozentrechnung, dies obliegt ganz der Wahlfreiheit der Lehrperson.

Beim Lösen von Prozentaufgaben wird ganz bewusst auf mehr oder weniger bekannte Formeln wie $A = G \cdot \frac{p}{100}$ oder $W = \frac{G}{100} \cdot p$ verzichtet. Schülerinnen und Schülern neigen teilweise dazu, Formeln dieser Art auswendig zu lernen, ohne die Sinnhaftigkeit zu erfassen bzw. diese ohne Hinterfragen einer Herleitung anzuwenden. Dies kann dazu führen, dass letztlich damit erzielte Ergebnisse widerspruchsfrei hingenommen werden, auch wenn sie manchmal aufgrund fehlerhafter Anwendung jenseits des real Vorstellbaren liegen. Das Lehrwerk bietet den Lernenden stattdessen eine Beziehung zwischen drei Zahlen an, die einerseits für jede Prozentaufgabe Gültigkeit hat und andererseits jedesmal dazu anhält, die Sachsituation zu überdenken und dann zu überlegen, welche Angaben vorliegen und welche Zahl gesucht ist: „x % von y sind z“. Naturgemäß wird diese Beziehung in der rechnerischen Anwendung auch als Formel verwendet werden müssen ($\frac{x}{100} \cdot y = z$), eine Verwechslung der einzelnen Zahlen ist jedoch aufgrund der zuvor erarbeiteten Beziehung zwischen x, y und z fast ausgeschlossen. In Musteraufgaben wird jeder Typ einer Prozentaufgabe detailliert vorgezeigt, in den anschließenden Aufgaben besteht die Möglichkeit des eigenständigen Lernens und Arbeitens sowie der intensiven Übung.

Im Abschnitt zu Vermehrung und Verminderung wird die Prozentdarstellung von Zahlen in vielen Zusammenhängen des Alltags behandelt. Auch hier wird die Beziehung „x % von y sind z“ zum besseren Verständnis herangezogen. Erklärungen zum Thema Mehrwertsteuer bzw. zu Rabatt und Skonto in vielfältigen Kontexten stellen die große Bedeutung der Prozentrechnung in vielen Lebensbereichen in den Mittelpunkt. Auch diverse grafische Darstellungen werden präsentiert und sollen von den Lernenden anhand anschaulicher Aufgaben sinnvoll verwendet und gedeutet werden.

Ganz besonders sei auf den Unterabschnitt „Prozentpunkte“ hingewiesen. Sehr deutlich wird hier vermittelt, dass zwischen Prozenten und Prozentpunkten ein gewaltiger Unterschied besteht. Anhand typischer Aufgaben hierzu soll den Schülerinnen und Schülern nahe gebracht werden, dass diesbezüglich viele Aussagen – vor allem in den Medien – hinsichtlich ihrer Korrektheit und inhaltlichen Relevanz überdacht werden müssen.

4 Gleichungen

Aufbauend auf das Kapitel 6 in Mathematik verstehen 1 zu Variablen, Termen und Gleichungen werden in der 6. Schulstufe diese Kenntnisse wiederholt, gefestigt und vertieft. Die ersten beiden Abschnitte bieten den Lernenden die Möglichkeit, die wesentlichen Aspekte des Gelernten aus der vorherigen Schulstufe noch einmal durchzugehen und sich die wichtigsten Begriffe, Vorstellungen und Darstellungen erneut einzuprägen. Dabei steht die Bedeutung von Variablen im Zentrum sowie der Unterschied zwischen Termen und Gleichungen. Analog zur Vorgehensweise im vorigen Schuljahr offerieren Streckendarstellungen von Gleichungen eine anschauliche Möglichkeit des Erstellens und Lösens derselben.

Im Abschnitt zum Lösen von Gleichungen wird mit Streckendarstellungen an bereits Bekanntes angeknüpft, jedoch werden mit den elementaren (grundlegenden) Umformungsregeln und den Waageregeln erstmals Methoden zum Umformen und Verändern von Gleichungen jenseits grafischer Veranschaulichungen und intuitiver Zugänge vorgestellt, mit denen Gleichungen gelöst werden können. Schülerinnen und Schülern soll so bewusst gemacht werden, welche Schritte sie beim Umformen einer Gleichung setzen, damit ein gewünschtes Ergebnis erhalten wird.

Das Interpretieren von Termen und Formeln wird im folgenden Abschnitt thematisiert. Anhand zweier Musteraufgaben wird gezeigt, was es bedeutet, einen Term in einem Situationszusammenhang zu deuten. Aufgaben aus der Geometrie werden ebenso behandelt wie Aufgaben aus alltäglichen Begebenheiten. Eine Vielzahl von Textaufgaben soll als Abschluss dieses Kapitels alles Gelernte zum Aufstellen von Termen und Gleichungen sowie zum Lösen von Gleichungen in jener Form abrufen, dass zusätzlich zum algebraischen Handeln die Tätigkeit des Übersetzens von der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und umgekehrt trainiert wird.

5 Proportionalitäten

Ausgehend von den Grundkenntnissen aus dem vergangenen Schuljahr zum Modell der direkten Proportionalität wird anhand von anschaulichen Aufgaben aus der Welt der Schülerinnen und Schüler Schritt für Schritt erarbeitet, wie zwei Größen einander zugeordnet werden können. Die beiden Aufgaben 5.01 (eventuell als Gruppenarbeit) und 5.02 sollten in jedem Fall als Einstieg in dieses Kapitel herangezogen werden. Die direkte Proportionalität kann so an sehr nachvollziehbaren Situationen erkannt und definiert sowie an weiteren Aufgaben modellhaft dargestellt und überdacht werden.

Die grafische Darstellung einer direkten Proportionalität knüpft ebenso an die 5. Schulstufe an. Mit Diagrammen, welche die Zuordnung zweier Größen veranschaulichen, ist bereits in Mathematik verstehen 1 im Kapitel 6 gearbeitet worden. In der 6. Schulstufe sollen diese Kenntnisse vertieft werden, indem der situationsabhängige Unterschied zwischen der Darstellung als Strahl oder als Punkte eines Strahls verdeutlicht wird. Die Lernenden sollen auf diese Art auch zwischen der tabellarischen und der grafischen Darstellung wechseln und daran direkte Proportionalität erkennen können. Erst daran anschließend empfiehlt es sich, Berechnungen zum Einfachen und zum Mehrfachen einer Größe durchzuführen, da man in dieser Weise auf eine gefestigte Grundvorstellung der direkten Proportionalität sicher aufbauen kann.

Analog zur Einführung der direkten Proportionalität wird ebenfalls anhand von anschaulichen Aufgaben aus der Welt der Schülerinnen und Schüler Schritt für Schritt erarbeitet, wie zwei Größen einander zugeordnet werden können, die im indirekten Verhältnis zueinander stehen. Auch hier sollen die Aufgaben 5.39 und 5.40 als Einstieg gewählt werden um mit Hilfe zweier unterschiedlicher Sachsituationen zu verdeutlichen, wo die Unterschiede zwischen direkter und indirekter Proportionalität liegen. Aufgaben zum Erkennen und Darstellen folgen zum Zweck der intensiven Auseinandersetzung mit diesem Modell.

Die grafische Veranschaulichung einer indirekten Proportionalität ist für die Lernenden etwas Neues. Die Darstellung sollte behutsam und eventuell mit technologischer Unterstützung erarbeitet werden. Auch hier ist es ratsam, den situationsabhängigen Unterschied zwischen der Darstellung als Hyperbelast oder als Punkte einer Hyperbel zu klären. Ähnlich wie im Abschnitt zur direkten Proportionalität wird erst jetzt das Ermitteln des Einfachen und des Mehrfachen einer Größe behandelt. Textaufgaben zum Festigen der Kenntnisse zu Proportionalitäten bilden dann den Abschluss des Kapitels. Auch hier kommt neben Aufgaben zum Darstellen und Berechnen den Multiple-Choice-Formaten wieder eine wesentliche Rolle zu.

6 Bekanntes und Neues aus der Geometrie

Wie bereits der Titel dieses Kapitels ankündigt, sollen Schülerinnen und Schüler auf den folgenden Seiten einerseits mit bereits Erlerntem weiterarbeiten und die Kenntnisse in diesen Bereichen festigen und vertiefen, andererseits aber auch neue Darstellungsmöglichkeiten, Bezeichnungen und Merkmale kennenlernen, die in weiterer Folge für viele geometrische Anwendungen von großer Bedeutung sind.

Den Beginn in diesem Kapitel macht etwas nur teilweise Neues, denn mit Quadratgittern sind Schülerinnen und Schüler sicherlich in vielen Belangen schon in Berührung gekommen. Genau dies wird am Anfang in den beiden Einstiegsaufgaben thematisiert. Die Unterschiede zum kartesischen Koordinatensystem sollen den Lernenden so erklärt und begreiflich gemacht werden.

Die beiden Achsen werden bewusst mit „1. Achse“ und „2. Achse“, und nicht mit „x-Achse“ und „y-Achse“ bezeichnet, da bei der Einführung des kartesischen Koordinatensystems für die Lernenden keine Veranlassung plausibel erscheinen wird, die Achsen mit Variablenbezeichnungen zu versehen. Zudem erleichtert die gewählte Bezeichnung die Zuordnung der 1. Koordinate zur 1. Achse und der 2. Koordinaten zur 2. Achse in der Darstellung als Zahlenpaar und im Koordinatensystem. Selbst in weiterer Folge bei Funktionen wird die 1. Achse häufig als Zeitachse und daher mit der Variablen t sowie die 2. Achse mit $f(t)$ beschriftet. Somit erspart man sich von den Lernenden einzufordern, „die x-Achse mit t zu bezeichnen“.

Auf den Ordnungspfeil auf jeder der beiden Achsen wird – analog zum Zahlenstrahl und zu grafischen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten – verzichtet.

Die Schreibweise $P = (3 \mid 5)$, welche einem Zahlenpaar eine Punktbezeichnung zuordnet, soll bereits in der 6. Schulstufe verdeutlichen, dass jedem Zahlenpaar genau ein Punkt im kartesischen Koordinatensystem entspricht. Genauso wie man etwa mit $r = 3$ einem Radius eine Maßzahl zuweist, erfolgt die mit Zahlenpaaren analog dazu und deshalb gibt es ein Gleichheitszeichen zwischen der Punktbezeichnung und dem Zahlenpaar. Diese Schreibweise ist mit der Vektorrechnung, dh. hinsichtlich des Rechnens mit Zahlenpaaren, Zahlentupeln und n -Tupeln, akkordiert und wird in dieser Form bei der schriftlichen Reifeprüfung verwendet. Daher wäre es kontraproduktiv, in der Sekundarstufe I das Gleichheitszeichen wegzulassen, wenn es in der Sekundarstufe II und bei der Reifeprüfung aus mathematisch relevanten und methodisch durchdachten Gründen eingesetzt wird. Die folgenden Aufgaben hierzu sollen die Schülerinnen und Schüler sorgsam und bedacht einerseits an das Darstellen von Zahlenpaaren als Punkte im Koordinatensystem heranführen und andererseits an das Ablesen von Punkten mit der damit verbundenen Darstellung als Zahlenpaar.

Der Abschnitt „Besondere Winkel“ vermittelt nach einer Wiederholung der Definition eines Winkels und der Arten von Winkeln anhand von Aufgaben, die auch andere Bereiche der Geometrie tangieren (zB den Maßstab), wesentliche Eigenschaften, die Winkel zueinander einnehmen können, dh. komplementäre, supplementäre Winkel, Parallelwinkel und Normalwinkel. Anhand verständlicher Aufgaben, die alle Handlungsbereiche abdecken, werden die neuen Kenntnisse eingeübt.

Ein eigener Abschnitt widmet sich dem Kongruenzbegriff bei Figuren. Hierbei liegt das Hauptaugenmerk beim Erkennen von deckungsgleichen Figuren und dem elementaren Unterschied zwischen Flächengleichheit, also Deckungsgleichheit, und Flächeninhaltsgleichheit.

Der letzte Abschnitt bereitet schon auf das Kapitel 7 „Dreiecke“ vor, in welchem die Streckensymmetrale und die Winkelsymmetrale essentielle Verwendung finden werden. Auch hier wird mit anschaulichen Einstiegen die Bedeutung dieser beiden besonderen Geraden erarbeitet. In diesem Lehrwerk wird die Streckensymmetrale einer Strecke AB mit m_{AB} und nicht mit s_{AB} bezeichnet, damit eine Verwechslung mit den Schwerlinien vermieden wird. Auch wenn die Begriffe in weiterer Folge nicht verwendet werden, können die Alternativbezeichnungen Mittelsenkrechte für Streckensymmetrale und Winkelhalbierende für Winkelsymmetrale fakultativ im Unterricht genannt werden.

7 Dreiecke

Die grundlegendste Eigenschaft von Dreiecken, nämlich die Tatsache, dass die Summe der Innenwinkelmaße in jedem Dreieck 180° beträgt, steht am Anfang des Kapitels. Schülerinnen und Schüler sollen selbst durch Messen und Vergleichen zu dieser Erkenntnis gelangen, die für viele weitere Anwendungen von zentraler Bedeutung ist. Alle weiteren wesentlichen Eigenschaften, vor allem die drei Möglichkeiten der Dreiecksungleichung, werden genannt und anhand von Aufgaben in diversen Lern- und Übungsformaten angeboten.

Der Abschnitt zu den Arten von Dreiecken bietet eine vereinfachte Einteilung, die sich lediglich an den Besonderheiten bei den Winkeln in einem Dreieck orientiert. In diesem Lehrwerk wird den Lernenden somit kein zweigeteilter Kriterienkatalog (Unterschiede nach Seitenlängen einerseits, Unterschiede nach Winkelmaßen andererseits) präsentiert, sondern es werden alle notwendigen Merkmale auf Basis der Winkelbeschaffenheiten nachvollziehbar entwickelt und in den darauf folgenden Lern- und Übungsaufgaben bereitgestellt. Immer wieder

wird auf bereits Gelerntes (zB das kartesische Koordinatensystem) zurückgegriffen und dessen Verwendung wie selbstverständlich in die Aufgaben eingebaut. In diesem Abschnitt stehen vor allem die Handlungsbereiche Interpretieren sowie Begründen und Argumentieren im Vordergrund, damit gewährleistet ist, dass Schülerinnen und Schüler Eigenschaften und Unterscheidungen bei Dreiecken beherrschen, bevor das Konstruieren den Fokus einnimmt.

Am Beginn des Abschnitts zum Konstruieren von Dreiecken steht abermals der Kongruenzbegriff, der wegweisend für die Eindeutigkeit beim Konstruieren von Dreiecken ist. In weiterer Folge ist jeder Unterabschnitt so benannt, wie er von Seiten der Lernenden gesehen wird, nämlich mit „Gegeben ist ...“. Jeder der Fälle kann am Anfang mit Utensilien nachgestellt werden, die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen, Bleistiften und Linealen (bzw. Geodreiecken). Auf diese Weise wird erreicht, dass durch eigenes Ausprobieren die Kongruenz von gelegten Dreiecken je nach Art der Bestimmungsstücke nachgewiesen werden kann. Um einen möglichst einheitlichen Aufbau zu ermöglichen, findet sich jeder Fall ungefähr auf jeweils einer Doppelseite mit den zugehörigen Aufgaben. Zudem wird jeweils anhand einer Musteraufgabe die Konstruktion schrittweise erklärt. Besonderer Wert liegt hierbei stets auf dem 1. Schritt, der Skizze.

Im Abschnitt zu den besonderen Punkten bei Dreiecken wird als Einführung jeweils eine Aufgabe angeboten, die in Gruppenarbeit gelöst bzw. entwickelt werden kann. Die Konstruktion wird für alle besonderen Punkte anhand von Musteraufgaben wieder ausführlich erläutert. Beim Umkreismittelpunkt findet sich auch der Satz von Thales, der sich in dieser Fassung auf den Umkreis eines Dreiecks bezieht, die bekanntere Fassung des Dreiecks im Halbkreis ist hier naturgemäß bereits miteingeschlossen. Auch in diesem Unterabschnitt werden die Streckensymmetralen mit m_{AB} etc. bezeichnet.

Für den Inkreismittelpunkt gilt eine ähnliche Vorgehensweise bei der Einführung wie für den Umkreismittelpunkt. Ein Alltagsbezug steht am Beginn, Konstruktionen werden detailliert vorgeführt, Aufgaben zu allen Handlungsbereichen folgen.

Eine häufig vernachlässigte Materie stellen die Ankreismittelpunkte dar, die in der Dreieckslehre aber nicht wegzudenken sind. Zudem bieten sie eine weitere Anwendungsmöglichkeit für die Winkelsymmetrale. In diesem Lehrwerk werden Definition, Konstruktion und Aufgaben hierzu angeboten.

Das Experimentieren mit vorhandenen Gegenständen im Unterricht fällt vor allem bei der Erarbeitung der Eigenschaften des Schwerpunkts recht leicht. In der Einstiegsaufgabe ist von einem Dreieck die Rede, das aus Karton ausgeschnitten werden soll; in der Regel leistet das Geodreieck aber auch hierfür gute Dienste, lediglich das Markieren einer Schwerlinie und des Schwerpunkts darauf ist nicht so einfach. Wie in den vorangegangenen Unterabschnitten wird auch hier die Konstruktion des Schwerpunkts in einer Musteraufgabe ausführlich dargelegt, weiters wird auf die Teilung der Schwerlinien durch S im Verhältnis 2 : 1 hingewiesen. Es folgen wieder Aufgaben zu allen Handlungsbereichen.

Beim Höhenschnittpunkt ist es sehr wichtig, dass zuvor über die Höhe eines Dreiecks reflektiert wird; die Einstiegsaufgabe geht genau darauf ein. In den beiden Musteraufgaben werden zwei typische Fälle der Lage des Höhenschnittpunkts vorgezeigt; dessen Lage in rechtwinkligen Dreiecken kann in einer Aufgabe erarbeitet werden.

Im Abschnitt zum Umfang eines Dreiecks wird auf die Besonderheiten von gleichseitigen und gleichschenkeligen Dreiecken abermals eingegangen, ebenso wie auf die Konstruktion des 60°-Winkels.

Die Bedeutung der Flächeninhaltsgleichheit kongruenter Figuren wird im Abschnitt zum Flächeninhalt rechtwinkliger Dreiecke wieder aufgegriffen. Dieser Bezug steht zur Verdeutlichung am Anfang des Abschnitts und soll in der Einstiegsaufgabe angewendet werden. Daraus wird die Formel für den Flächeninhalt hergeleitet und in vielfältigen Anwendungsaufgaben geübt und gefestigt.

Der letzte Lernabschnitt in diesem Kapitel ist einigen Sätzen über Dreiecke gewidmet. Er eignet sich besonders für interessierte Schülerinnen und Schüler, die sich über das gewohnte Maß hinaus mit Besonderheiten von Dreiecken beschäftigen wollen.

Die Euler'sche Gerade wird zwar in den einzelnen Lernabschnitten nicht thematisiert, sie findet jedoch im Abschnitt 7.9 MERKWÜRDIGES neben dem Feuerbach-Kreis ihren Platz. Es steht den Lehrpersonen frei, nach Behandlung der besonderen Punkte bei Dreiecken Bezug zu dieser Sonderseite zu nehmen und für beliebig ausgewählte Aufgaben der Lernabschnitte die Euler'sche Gerade zu konstruieren bzw. konstruieren zu lassen. Hier bietet sich unzweifelhaft der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware (zB GeoGebra) an.

8 Vierecke

Der erste Abschnitt des Kapitels über Vierecke behandelt grundlegende Eigenschaften von Vierecken. Dabei steht das Erkennen von Unterschieden und Gemeinsamkeit bei Vierecken aller Arten im Vordergrund. Hier werden sowohl der Gegensatz von konvexen und nicht konvexen genannt als auch die Tatsache, dass die Summe der Winkelmaße in jedem Viereck 360° beträgt. Ebenso soll die korrekte Beschriftung von Vierecken vorgeführt und geübt werden.

Anknüpfend an die Kenntnisse aus der 5. Schulstufe werden im folgenden Abschnitt die Eigenschaften von Rechteck und Quadrat wiederholt, damit bereits erlernte Besonderheiten von Vierecken sowie Kompetenzen beim Berechnen von Umfang und Flächeninhalt in bekannten und neuen Zusammenhängen (zB Konstruieren im kartesischen Koordinatensystem) gefestigt werden können. Vernetzungen zu anderen Bereichen (zB Maßstab oder Umkehraufgaben) fließen bewusst in mehrere Aufgaben ein.

Der nächste Abschnitt thematisiert noch nicht bekannte Vierecke, nämlich das Parallelogramm und dessen Spezialfall, den Rhombus. Die Einstiegsaufgabe, zu der im Anhang des Buches die passenden Papierstreifen vorliegen, soll so eine haptische Vorstellung dazu vermitteln, wie ein Parallelogramm gebildet wird, und den Schülerinnen und Schülern vor Augen führen, dass sich der Umfang wie bei einem Rechteck ermitteln lässt. In den Definitionen werden diese Erkenntnisse zusammengefasst und die Formeln für die Berechnung des Umfangs angeführt. In einer Musteraufgabe wird schrittweise die Konstruktion eines Parallelogramms entwickelt, anhand derer die weiteren Aufgaben als Lern- und Übungsmaterial betrachtet werden können; in einer weiteren Musteraufgabe wird vorgeführt, wie der Inkreis in einem Rhombus konstruiert wird. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms wird lediglich mit Hilfe des Zerlegens in Rechtecke und rechtwinkelige Dreiecke entwickelt; es findet sich demnach keine Formel für den Flächeninhalt in diesem Abschnitt, so wie es im Lehrplan festgehalten ist. Die weiteren Aufgaben hierzu sprechen alle Handlungsbereiche der Bildungsstandards an.

Ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt wird das Trapez zunächst mit seinen Eigenschaften erfasst, wobei auch die Sonderformen (rechtwinkeliges und gleichschenkeliges Trapez) Berücksichtigung finden. Auch hier wird in Musteraufgaben gezeigt, wie eine Konstruktion Schritt für Schritt erfolgen und wie durch Zerlegen der Figur deren Flächeninhalt ermittelt werden kann. Immer wieder soll das Konstruieren im kartesischen Koordinatensystem anhand von Aufgaben geübt werden.

Dem Deltoid ist der nächste Abschnitt des Kapitels gewidmet. Eine exakte Definition, Musteraufgaben zur Konstruktion des Inkreises und zum Ermitteln des Flächeninhalts sowie vielfältige Aufgaben prägen diesen Teil des Kapitels über Vierecke.

Der Abschluss des Kapitels ist der Konstruktion allgemeiner Vierecke mit Bezug zum Thema Maßstab gewidmet sowie diversen Aufgaben aus dem Alltag, in denen Vierecke eine Rolle spielen. Verknüpfungen zum Rechnen mit Prozenten sowie zur Bruchdarstellung von Zahlen vervollständigen in so manchen Aufgaben das Gesamtkonzept des Kapitels.

9 Vielecke

Die Schülerinnen und Schülern sollen in diesem Kapitel Vorstellungen dafür entwickeln, welche geometrischen Erweiterungen von Dreiecken und Vierecken möglich sind und welche Besonderheiten hinsichtlich der Eigenschaften auftreten können. Auf spielerische Art wird anhand von Mustern, die aus Vielecken bestehen, in die Thematik eingeführt. Die Begriffe „konvex“ und „nicht konvex“ aus dem Kapitel 8 werden wieder aufgegriffen und so gefestigt. Sehr behutsam und mit technologischer Unterstützung soll der Zusammenhang zwischen der Zahl der Eckpunkte und der Zahl der Diagonalen erarbeitet werden. Diese Erkenntnis ist zudem auch für andere Bereiche in der Sekundarstufe II von Bedeutung (zB bei Grundvorstellungen zum Binomialkoeffizienten). Auch bei den Vielecken lässt sich auf einfache Art die Summe der Innenwinkelmaße ermitteln, indem auf diesbezüglich bereits erworbene Kenntnisse bei Dreiecken zurückgegriffen wird. Die Aufgaben hierzu verknüpfen mehrere Themenbereiche (zB Maßstab und Berechnen des Flächeninhalts) mit der neuen Materie der Polygone. Auch auf Spezialfälle bei Vielecken (Gleichseitigkeit, Gleichwinkeligkeit, Regularität) wird hingewiesen.

Die nächsten beiden Abschnitte haben das regelmäßige Sechseck und das regelmäßige Achteck, deren Eigenschaften sowie deren Konstruktion zum Hauptthema. Der Abschnitt zu weiteren regelmäßigen Vielecken führt den Begriff des Mittelpunktswinkels ein, der das Tor zur Geometrie regelmäßiger n -Ecke hinsichtlich Konstruktion und Ermittlung von charakteristischen Maßen öffnet. Begründungsaufgaben stellen in diesem Abschnitt neben Aufgaben zu Konstruktionen einen Schwerpunkt dar.

10 Das Prisma

Das zehnte Kapitel des Lehrbuchs vollzieht den Schritt von der Ebene in die Geometrie des Raums, so wie dies bereits in der 5. Schulstufe mit den Sonderfällen Quader und Würfel geschehen ist. Hierbei wird auf die Vorkenntnis zurückgegriffen, dass zwischen Figuren in der Ebene und Körpern im Raum unterschieden werden muss. Eine Musteraufgabe am Anfang des ersten Abschnitts führt zur Definition von Prismen, wobei bereits Sonderfälle erwähnt werden. Wichtig erscheint in diesem Zusammenhang, dass den Lernenden bewusst wird, dass die bereits kennengelernten Körper Quader und Würfel zu diesen Sonderfällen gehören, da alle Eigenschaften von Prismen auch für diese beiden bereits bekannten geometrischen Körper zutreffen. Das Erkennen von solchen Eigenschaften anhand abgebildeter Gegenstände sowie der Umgang mit Schrägrissen stehen im Mittelpunkt der ersten Begegnung mit dem neuen Oberbegriff.

Aus dem vergangenen Schuljahr sollte der Begriff der Symmetrie bereits bekannt sein. Dieser wird im Abschnitt über Körperschnitte im räumlichen Bereich erweitert.

Das Berechnen des Volumens eines Quaders bzw. eines Würfels ist aus der 5. Schulstufe bekannt. Nach einer Wiederholung der Raum- und Hohlmaße wird nun darauf aufbauend der Rauminhalt für Prismen entwickelt. Musteraufgaben zeigen unterschiedliche Möglichkeiten der Berechnung und lassen so die Schülerinnen und Schüler die Bearbeitung einer Problemstellung schrittweise nachvollziehen. Verknüpfungen zum Inhaltsbereich Variablen fließen beim Aufstellen von Formeln für ein Volumen gezielt ein.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zum Netz und zum Oberflächeninhalt von Prismen greift gleich auf mehrere Vorkenntnisse zurück: auf die Flächenmaße, auf die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Rechteck und rechtwinkeligem Dreieck sowie auf das Netz von Quader und Würfel. Auch hier wird neben Konstruktionen von Netzen und Berechnungen zum Oberflächeninhalt auf das Aufstellen von Formeln Bezug genommen. Unterstützungen zur besseren Vorstellung bieten das Netz eines dreiseitigen Prismas im Anhang des Lehrbuchs sowie die Online-Ergänzung mit Demonstrations- und Übungsaufgaben.

11 Häufigkeiten

Die erste Begegnung mit statistischen Begriffen hat bereits in der 5. Schulstufe stattgefunden. Möglichkeiten zum Darstellen von Daten mit Hilfe von Tabellen und Schaubildern wurden bereits erarbeitet, erste Methoden zur Auswertung von Daten wurden vorgenommen. Diese Kenntnisse werden in der 6. Schulstufe wiederholt, ausgebaut und vertieft. Daher steht am Anfang des Kapitels eine Einstiegsaufgabe, die in Gruppenarbeit durchgeführt werden kann und die Lernenden an das empirische Vorgehen heranzuführen soll. Zudem werden in Musteraufgaben wichtige grafische Darstellungen gezeigt; gleichzeitig wird eine Verknüpfung zum Rechnen mit Prozenten vorgenommen. Die anschließenden Aufgaben dienen der Übung und Festigung.

Der Schwerpunkt des Kapitels findet sich dann im zweiten Abschnitt. Anhand zweier Musteraufgaben wird vorgeführt, worin der Unterschied zwischen absoluter und relativer Häufigkeit besteht. Der Bezug zur Prozentrechnung ist hier obligatorisch und festigt in hohem Ausmaß die Verbindung zwischen Bruchdarstellung, Dezimaldarstellung und Prozentdarstellung. Die Sinnhaftigkeit der Wahl der grafischen Veranschaulichung wird angesprochen und soll die Lernenden zur kritischen Betrachtung statistischer Illustrationen anhalten.

Ein nicht minder wichtiger Bereich ist die Datenmanipulation. Im letzten Abschnitt können anhand von drei Musteraufgaben die Möglichkeiten der Verfälschung von Eindrücken durch gezielt erstellte Darstellungen diskutiert und erarbeitet werden; die beiden Übungsaufgaben sollen dies untermauern. Zudem wird auf den wichtigen Unterschied zwischen dem Verfälschen und dem Fälschen von Daten hingewiesen.