2 EINIGE ANWENDUNGEN DER INTEGRALRECHNUNG

W 2.01 Wie kann man den Inhalt der Fläche berechnen, die vom Graphen einer stetigen Funktion f im Intervall [a; b] mit der ersten Achse eingeschlossen wird, wenn die Funktion f nur Funktionswerte ≥ 0 annimmt?

W 2.02 Wie kann man den Inhalt der Fläche berechnen, die vom Graphen einer stetigen Funktion f im Intervall [a; b] mit der ersten Achse eingeschlossen wird, wenn die Funktion f nur Funktionswerte ≤ 0 annimmt?

W 2.03 Wie kann man die Länge eines im Zeitintervall $[t_1 ; t_2]$ zurückgelegten Wegs berechnen, wenn eine Geschwindigkeitsfunktion $t \mapsto v(t)$ gegeben ist, die in $[t_1 ; t_2]$ nur Werte ≥ 0 annimmt!

W 2.04 Es sei A(z) der Inhalt der Querschnittsfläche eines Körpers in der Höhe z $(0 \leq z \leq 4)$. Wie kann man das Volumen des Körpers mit einem Integral berechnen? Was muss über die Funktion A vorausgesetzt werden?

W 2.05 Der Graph der Funktion f im Intervall [a; b] rotiert um die x-Achse. Warum kann das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers nach der Formel $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ berechnet werden?

W 2.06 Wird ein Körper durch eine konstante Kraft von a nach b bewegt, dann lautet die Formel für die verrichtete Arbeit: $W(a; b) = F \cdot (b - a)$. Wie verändert sich diese Formel, wenn die Kraft längs dieses Wegs nicht konstant ist?

W 2.07 Es sei P(t) die Leistung einer Maschine zum Zeitpunkt t $(0 \leq t \leq m)$. Wie kann man die von der Maschine im Zeitintervall [0; m] verrichtete Arbeit berechnen?

W 2.01 A = $\int_a^b f$

W 2.02 A = $-\int_a^b f$

W 2.03 Man kann eine solche Weglänge näherungsweise berechnen, indem man das Zeitintervall [a; b] in Teilintervalle zerlegt. In jedem Teilintervall nimmt man gleichförmige Bewegung (dh. konstante Geschwindigkeit) an, berechnet die Längen der zurückgelegten Wege in den einzelnen Teilintervallen und summiert schließlich diese Weglängen. Geht man dabei in jedem Teilintervall von der kleinsten (bzw. größten) Geschwindigkeit in dem Teilintervall aus, erhält man eine Untersumme (bzw. Obersumme) für die gesamte Weglänge w(a; b). Anschaulich ist klar, dass für alle Untersummen U und alle Obersummen O von v in [a; b] gilt:
$U \leq w(a; b) \leq O$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt aber auch für alle Untersummen U und alle Obersummen O in [a; b]: $U \leq \int_a^b v(t)dt \leq O$.
Da es genau eine reelle Zahl gibt, die „zwischen" allen Untersummen U und allen Obersummen von v in [a; b] liegt, muss gelten:
$w(a; b) = \int_a^b v(t)dt$.

W 2.04 Es sei K ein Körper und A(z) der Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe z (mit $a \leq z \leq b$). Es gilt für das Volumen V(K) des Körpers: $V(K) = \int_a^b A(z)dz$.
Dabei muss die Querschnittsflächenfunktion A als stetig vorausgesetzt werden.

W 2.05 Dreht sich der Graph einer Funktion f um die x-Achse, entsteht ein Drehkörper (Rotationskörper). Setzt man y = f(x), so gilt für den Inhalt der Querschnittsflächenfunktion A an der Stelle x: $A(x) = y^2 \cdot \pi$.
Für das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich: $V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b (y^2 \cdot \pi)dx = \int_a^b ([f(x)]^2 \cdot \pi)dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

W 2.06 $W(a; b) = \int_a^b F(x)dx$

W 2.07 $W(a; b) = \int_0^m P(t)dt$