4 EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

W 4.01 Was versteht man unter einer Exponentialfunktion?

W 4.02 Was muss bei einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ über c und über a vorausgesetzt werden? Was bedeuten die Zahlen c und a?

W 4.03 Skizziere die typische Form des Graphen einer Funktion $f: x \mapsto a^x$ für **a)** $a > 1$, **b)** $0 < a < 1$! Durch welchen Punkt verlaufen alle diese Graphen? Was lässt sich über die Monotonie aussagen?

W 4.04 Was lässt sich über die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto a^x$ und $g: x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ aussagen?

W 4.05 Beschreibe Unterschiede zwischen linearem und exponentiellem Wachsen!

W 4.06 Sei $f(x) = a^x$. Begründe, dass f(x) bei einer Vergrößerung von x um 1 stets um den gleichen Prozentsatz p % vom Ausgangswert wächst bzw. fällt! Drücke p durch a aus!

W 4.07 Ein exponentieller Wachstums- bzw. Abnahmeprozess kann durch $N(t) = N_0 \cdot a^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{\pm\lambda t}$ beschrieben werden. Was gibt N_0 an? Für welche Werte von a liegt ein Wachstumsprozess, für welche ein Abnahmeprozess vor? Wie nennt man λ? Wie hängen a und λ zusammen?

W 4.08 Was versteht man unter der Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit eines exponentiellen Wachstums- bzw. Abnahmeprozesses? Erläutere, wie man diese Zeiten berechnen kann!

W 4.09 Was versteht man unter einer Logarithmusfunktion?

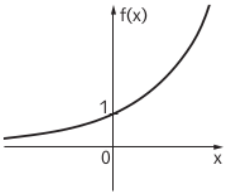
W 4.10 Skizziere die typische Form des Graphen einer Funktion $f: x \mapsto \log_a x$ für **a)** $a > 1$, **b)** $0 < a < 1$! Durch welchen Punkt verlaufen alle diese Graphen? Was lässt sich über die Monotonie aussagen?

W 4.11 Skizziere den typischen Verlauf des Graphen eines kontinuierlichen logistischen Wachstums! Beschreibe Eigenschaften der zugrundeliegenden Wachstumsfunktion $N: t \mapsto N(t)$!

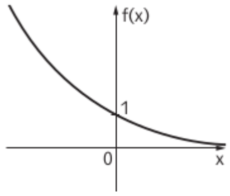
W 4.01 Unter einer Exponentialfunktion versteht man eine reelle Funktion f: $A \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ (mit $c \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$).

W 4.02 a muss eine positive reelle Zahl $\neq 1$ sein. c muss aus $\mathbb{R}^*$ sein.
$c = f(0)$ = Funktionswert an der Stelle 0
a = Faktor, mit dem sich der Funktionswert ändert, wenn das Argument um 1 erhöht wird.

W 4.03 **a)**



b)



Alle Graphen verlaufen durch den Punkt (0 | 1). Für $a > 1$ ist f streng monoton steigend, für $0 < a < 1$ ist f streng monoton fallend.

W 4.04 Die Graphen der Funktionen liegen symmetrisch bezüglich der 2. Achse.

W 4.05 **Lineares Wachsen:**
Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets gleiche Zunahme der Funktionswerte.
- Die absolute Änderung $f(x + h) - f(x)$ hängt nur von der Intervalllänge h, aber nicht von der Stelle x ab.
- Der Differenzenquotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist konstant, hängt also weder von der Intervalllänge h noch von der Stelle x ab.

Exponentielles Wachsen:
Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets Zunahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor bzw. um den gleichen Prozentsatz vom Ausgangswert.
- Die relative Änderung $\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$ hängt nur von der Intervalllänge h, aber nicht von der Stelle x ab.
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ hängt nur von der Intervalllänge h ab.

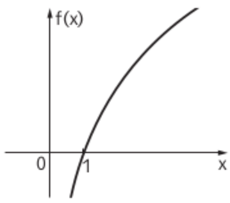
W 4.06 $f(x + 1) = a^{x+1} = a^x \cdot a = f(x) \cdot a$.
Setzt man $a = 1 \pm \frac{p}{100}$, dann gilt: $f(x) = f(x) \cdot (1 \pm \frac{p}{100})$. Das bedeutet eine Erhöhung bzw. Verminderung von f(x) um p % von f(x).
Für $a > 1$ gilt: $a = 1 + \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 100 \cdot (a - 1)$
Für $0 < a < 1$ gilt: $a = 1 - \frac{p}{100} \Leftrightarrow p = 100 \cdot (1 - a)$

W 4.07 $N_0 = N(0)$ = Wert der betrachteten Größe N zum Zeitpunkt 0
Für $a > 1$ liegt ein Wachstumsprozess, für $0 < a < 1$ liegt ein Abnahmeprozess vor.
λ heißt Wachstums- bzw. Abnahmekonstante (Zerfallskonstante).
Für $a > 1$ gilt: $a = e^{\lambda}$ bzw. $\lambda = \ln a$
Für $0 < a < 1$ gilt: $a = e^{-\lambda}$ bzw. $\lambda = -\ln a$

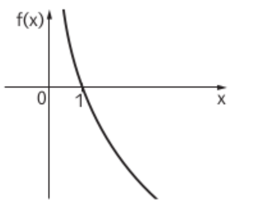
W 4.08 Die Verdopplungszeit T bei einem exponentiellen Wachstumsprozess gibt an, in welcher Zeitspanne sich die untersuchte Größe N jeweils verdoppelt. T ergibt sich als Lösung der Gleichung $N(t) = 2 \cdot N_0$.
Die Halbwertszeit T bei einem exponentiellen Abnahmeprozess gibt an, in welcher Zeitspanne sich die untersuchte Größe N jeweils halbiert. T ergibt sich als Lösung der Gleichung $N(t) = 0{,}5 \cdot N_0$.

W 4.09 Unter einer Logarithmusfunktion versteht man eine reelle Funktion f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot \log_a x$ (mit $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$).

W 4.10 **a)**

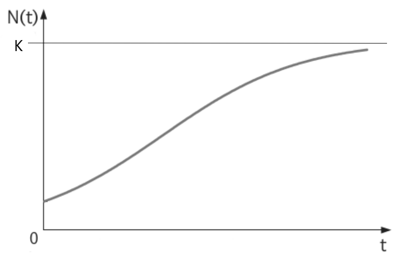


b)



Alle Graphen verlaufen durch den Punkt (1 | 0). Für $a > 1$ ist f streng monoton steigend, für $0 < a < 1$ ist f streng monoton fallend.

W 4.11



- Die Funktion N ist streng monoton steigend.
- Es gilt $N_0 \leq N(t) < K$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.
- Wenn K sehr viel größer als N_0 ist (in Zeichen: $K \gg N_0$), verläuft das logistische Wachstum anfänglich annähernd exponentiell.
- Für sehr große Werte von t gilt: $N(t) \approx K$.