8 REIHEN

W 8.01 Wie kann man die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe berechnen?

W 8.02 Wie kann man die Summe einer endlichen geometrischen Reihe berechnen?

W 8.03 Unter welcher Voraussetzung und wie kann man die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe berechnen?

W 8.04 Erkläre den Begriff „Kapitalertragssteuer“ anhand eines geeigneten Beispiels!

W 8.05 Erkläre die Begriffe „gemischte Verzinsung“ und „theoretische Verzinsung“ anhand geeigneter Beispiele! Welche Vorteile bringt die theoretische gegenüber der gemischten Verzinsung?

W 8.01 Eine endliche arithmetische Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ hat die Summe $S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

W 8.02 Eine endliche geometrische Reihe $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ mit dem Quotienten q hat die Summe $S = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

W 8.03 Eine unendliche geometrische Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ mit dem Quotienten q hat eine Summe unter der Voraussetzung, dass $|q| < 1$ gilt. Der Wert der Summe S der Reihe ist dann $b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

W 8.04 Ein Teil des Zinsertrags muss als Kapitalertragssteuer (kurz KESt) an das Finanzamt abgeliefert werden. Diese beträgt derzeit (Stand 2018) 25 %, dh. 25 % der vereinbarten Zinsen (Bruttozinsen) gehen an den Staat und nur 75 % werden effektiv dem Sparer gutgeschrieben. Die verbleibenden Zinsen nennt man die effektiven Zinsen, den zugehörigen Zinssatz $p_{eff}\,\% = 0{,}75 \cdot p\,\%$ nennt man den effektiven Zinssatz. ZB: Bei einem Zinssatz von $p\,\% = 0{,}5\,\%$ ist der effektive Zinssatz $p_{eff}\,\% = 0{,}75 \cdot 0{,}5\,\% = 0{,}375\,\%$.

W 8.05 Gemischte Verzinsung: Für volle n Jahre werden für ein Kapital K_0 zum effektiven Jahreszinssatz p % Zinseszinsen nach der Formel $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ berechnet, für Teile eines Jahres nur einfache Zinsen. Wird das Kapital K_n dann noch t Tage mit p % verzinst, dann beträgt das Endkapital E nach weiteren t Tagen:
$E = K_n \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360})$ für $0 \leq t \leq 360$.
Der gemischten Verzinsung entspricht somit eine abschnittsweise lineare Funktion.
ZB: $K_0 = 5\,000$ €, $p_{eff}\,\% = 0{,}5\,\%$, Laufzeit: drei Jahre und 90 Tage
Kapital K_3 nach drei Jahren: $K_3 = 5\,000 \cdot 1{,}005^3 \approx 5\,075{,}38$ (€),
Endkapital E nach weiteren 90 Tagen: $E \approx 5\,075{,}38 \cdot (1 + \frac{0{,}5}{100} \cdot \frac{90}{360}) \approx 5\,081{,}72$ (€)

Theoretische Verzinsung: Die Zinseszinsformel wird auch für die tageweise Verzinsung herangezogen. Wird ein Kapital K_0 zum effektiven Jahreszinssatz p % verzinst, dann beträgt das Kapital K_x nach x Jahren:
$K_x = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$, wobei $x = n + \frac{t}{360}$.
Der theoretischen Verzinsung entspricht somit eine Exponentialfunktion.
ZB: $K_0 = 5\,000$ €, $p_{eff}\,\% = 0{,}5\,\%$, Laufzeit: drei Jahre und 90 Tage, dh. $x = 3{,}25$
$K_{3,25} = 5\,000 \cdot (1 + \frac{0{,}5}{100})^{3{,}25} \approx 5\,081{,}71$ (€)

Man erkennt, dass der Zinsertrag bei gemischter Verzinsung im Allgemeinen größer ist als bei theoretischer Verzinsung, doch ist der Unterschied nicht sehr groß, da die abschnittsweise lineare Funktion von der Exponentialfunktion nur wenig abweicht. Für eine Näherung kann die einfacher zu berechnende theoretische Verzinsung der gemischten Verzinsung vorgezogen werden.