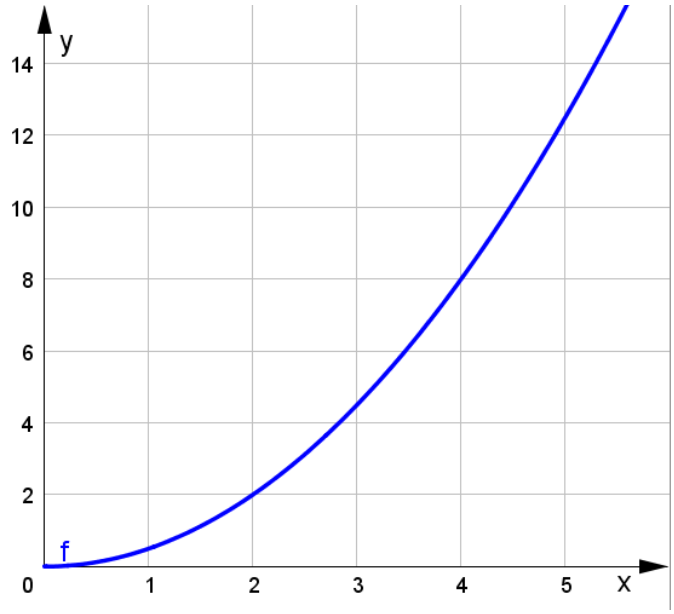
Ich kann den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben.

B, C

1 Im Diagramm ist der Graph einer Funktion f dargestellt.



a. Zerlege das Intervall [0; 4] in zwei gleich große Teilintervalle und berechne die größte Unter- und die kleinste Obersumme von f auf diesen Teilintervallen.

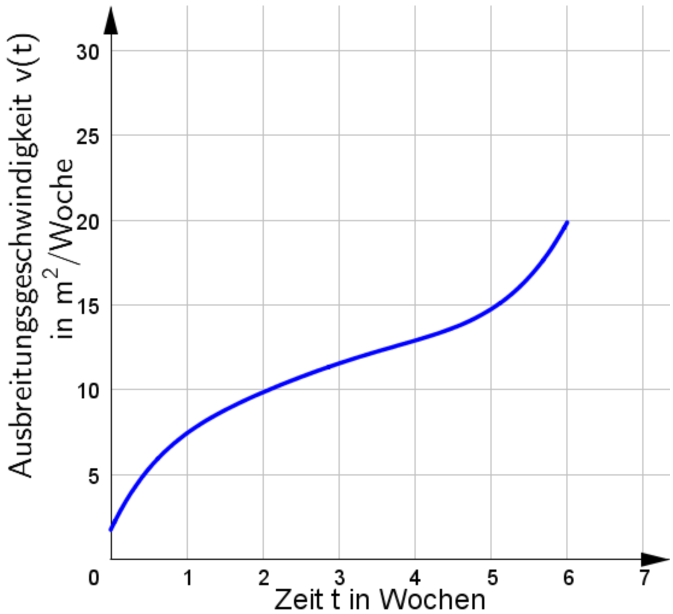
b. Erkläre, wie sich die Ober- und Untersumme im Vergleich zu den in Aufgabe **a.** berechneten Werte verändern, wenn man das Intervall [0; 4] in 100 gleich breite Teilintervalle zerlegt.

c. Argumentiere, warum der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^4 f(x)\,dx$ zwischen den beiden in Aufgabe **a.** berechneten Werten liegt.

A, B, C, D

2 In einem See wurde eine bestimmte Alge entdeckt, die sich rasch ausbreitet. Die durchschnittliche Ausbreitungsgeschwindigkeit v(t) der Alge ist im Diagramm dargestellt, zughörige Daten sind in der Tabelle angegeben.

Zeit t in Wochen	Ausbreitungsgeschwindigkeit v(t) in m^2/Woche
0	1,76
1	7,44
2	9,85
3	11,56
4	12,91
5	14,75
6	19,88



a. Zerlege das Intervall [0; 6] in 6 gleich breite Teilintervalle und zeichne eine **(1)** möglichst kleine Obersumme, **(b)** eine möglichst große Untersumme auf diesen Teilintervallen ein. Berechne diese Ober- und Untersumme.

b. Interpretiere die in Aufgabe **a.** berechneten Werte im Sachzusammenhang.

c. Erkläre, wie sich die Werte aus Aufgabe **a.** verändern, wenn man das Intervall [0; 6] in immer mehr gleich breite Teilintervalle zerlegt wird.

d. Erkläre, wie der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 v(t)\,dt$ mit der in Aufgabe **a.** berechneten Ober- und Untersumme zusammenhängt.

e. Interpretiere den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 v(t)\,dt$ im Sachzusammenhang.

Autorin: Bettina Ponleitner

Ich kann den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben.

C **3** Von einer Funktion $f:[a;b] \to R$ kennt man die größte Untersumme U_n und die kleinste Obersumme O_n, die man bei der Zerlegung des Intervalls in n gleich breite Teilintervalle erhält. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,dt = 20{,}83$. Ordne jedem Paar aus Ober- und Untersumme eine passende Anzahl n an Teilintervallen zu.

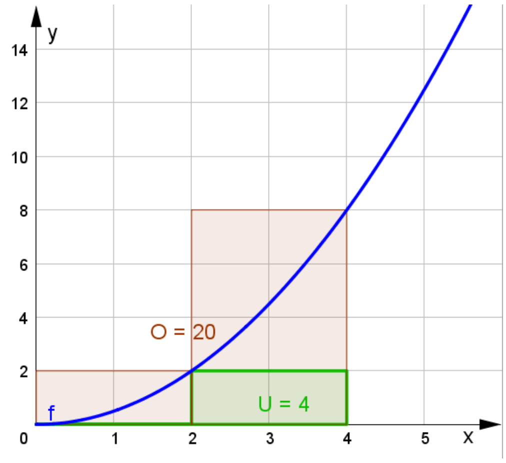
a.	$U_n = 17{,}81$, $O_n = 24{,}06$
b.	$U_n = 11{,}57$, $O_n = 32{,}41$
c.	$U_n = 20{,}52$, $O_n = 21{,}15$
d.	$U_n = 19{,}60$, $O_n = 22{,}10$

A	$n = 3$
B	$n = 10$
C	$n = 25$
D	$n = 100$

Lösungen zu:
Ich kann den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben.

1 **a.** $U = 2 \cdot f(0) + 2 \cdot f(2) = 0 + 4 = 4$,

$O = 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4) = 4 + 16 = 20$



b. Zerlegt man das Intervall [0; 4] in 100 gleich breite Teilintervalle, ist die neue Untersumme größer als U aus Aufgabe **a.**, während die neue Obersumme kleiner ist als O aus Aufgabe **a.**

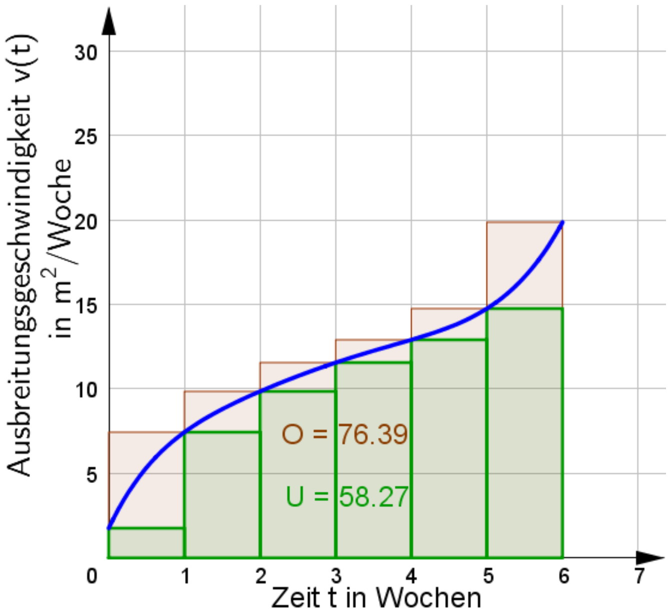
c. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^4 f(x)\,dx$ entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Intervall [0; 4] und dem Graphen von f. Wie man im Diagramm deutlich sehen kann, ist die Obersumme deutlich größer als dieser Flächeninhalt, während die Untersumme deutlich kleiner ist.

2 **a.** *Untersumme:* Die Höhe des ersten Rechtecks entspricht v(0), die Höhe des 6. Rechtecks entspricht v(5). Die Breite aller Rechtecke beträgt 1. Daher ist die Untersumme

$U = 1 \cdot v(0) + 1 \cdot v(1) + \ldots + 1 \cdot v(5) = 58{,}27$.

Obersumme: Die Höhe des ersten Rechtecks entspricht v(1), die Höhe des 6. Rechtecks entspricht v(6). Die Breite aller Rechtecke beträgt 1. Daher ist die Obersumme

$U = 1 \cdot v(1) + 1 \cdot v(2) + \ldots + 1 \cdot v(6) = 76{,}39$



b. Die Untersumme aus Aufgabe a. stellt eine unter Schranke, die Obersumme eine obere Schranke für die von der Alge nach 6 Wochen bewachsenen Seefläche dar. Das heißt, nach 6 Wochen sind mindestens 58,27 m^2, aber höchstens 76,39 m^2 des Sees von der Alge bewachsen.

c. Zerlegt man das Intervall [0; 6] in immer mehr gleich breite Teilintervalle, wird der Wert der Untersumme größer, der Wert der Obersumme kleiner. Die beiden Werte nähern sich dabei immer mehr an.

d. Zerlegt man das Intervall [0; 6] in immer mehr gleich breite Teilintervalle, nähern sich der Wert der Untersumme und der Wert der Obersumme immer mehr dem Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 v(t)\,dt$ an.

e. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 v(t)\,dt$ gibt an, welche Seefläche nach 6 Wochen von der Alge bewachsen ist.

3 [Hinweis: Je weniger Teilintervalle, desto größer ist der Unterschied zwischen den Werten der Unter- und der Obersumme.]

a. B, **b.** A, **c.** D, **d.** C

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben.

Autorin: Bettina Ponleitner