Big Bang HTL 1

Kap. 9 Rotationen

Kreisbahn eines Körpers

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$[\omega] = s^{-1}$

v ... Bahngeschwindigkeit
r ... Bahnradius
f ... Drehzahl, Frequenz
T ... Zeitdauer einer Umdrehung
m ... Masse

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$[\alpha] = s^{-2}$

Zentripetalkraft

a ... Zentripetalbeschleunigung

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot a$$

Drehimpuls

$L = m \cdot v \cdot r$

$[L] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = J{\cdot}s$

Ein (auf der Kreisbahn) **mitbewegter Beobachter** verspürt eine „Fliehkraft" nach außen. Diese durch die **Trägheit** verursachte **Zentrifugalkraft** ist gleich groß wie die Zentripetalkraft, aber radial nach außen gerichtet.

Satz von der Erhaltung des Drehimpulses
In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls erhalten.

Rotierender Körper

Trägheitsmoment

$I = m \cdot r^2$

$[I] = kg \cdot m^2$

m ... Masse
r ... Abstand des Körpers von der Drehachse

Drehimpuls

$L = I \cdot \omega$

$[L] = N \cdot m \cdot s = J{\cdot}s$

Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Drehmoment

F ... Kraft auf den Körper

$M = F \cdot r$

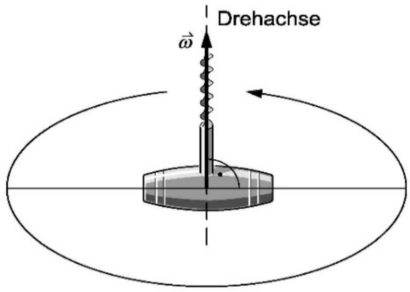
$[M] = N \cdot m$

Die Grundgleichung der Mechanik für rotierende Systeme lautet

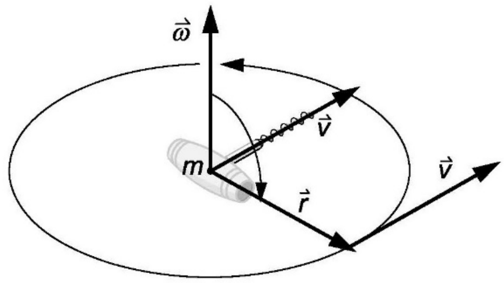
$M = I \cdot \alpha$

Vektoriell

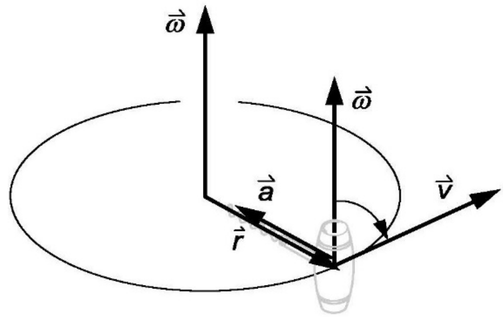
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$
$$\vec{F}_Z = -\omega^2 \cdot m \cdot \vec{r} = m{\cdot}\vec{a}$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$



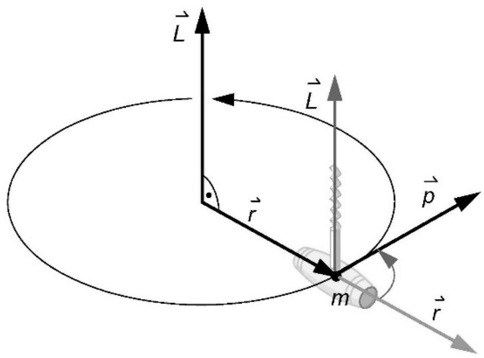
Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:



Zentripetalbeschleunigung $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$:



Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$:



Beispiele

B 9.1 Wieviel Umdrehungen pro Minute macht ein Autoreifen (Durchmesser 60 cm) bei einer Fahrgeschwin digkeit von 130 km·h^{-1}?
Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit und wie groß ist die Zentrifugalbeschleunigung auf die Profilteile der Lauffläche?

Pro Minute legt das Auto $\frac{130000}{60}$ m = 2170 m zurück. Da der Reifenumfang u = 60 cm·3,14 ≈ 1,9 m beträgt, hat der Reifen eine Drehzahl von $\frac{2170\,\text{m}}{1{,}9\,\text{m}}$ = 1140 Umdrehungen pro Minute.
(Der Motor dreht nur etwa dreimal so rasch!) Die Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich aus

$$\omega = \frac{v}{r}$$

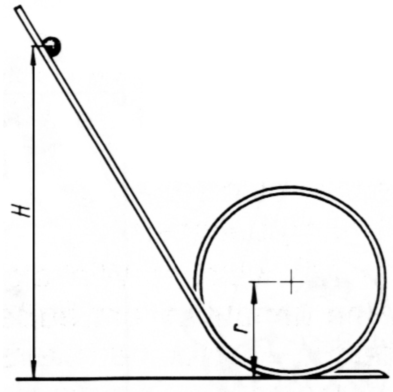
$$\underline{\omega =} \frac{130}{3{,}6 \cdot 0{,}3}\,\text{s}^{-1} = \underline{120\,\text{s}^{-1}}$$

und die Zentrifugalbeschleunigung $a = \frac{v^2}{r}$ ist

$$\underline{a =} \frac{(130/3{,}6)^2}{0{,}3}\,\text{m·s}^{-2} = \underline{4350\,\text{m·s}^{-2}}$$

Dies ist ca. die 400fache Fallbeschleunigung.
Dennoch kommt ein Reifenplatzer nicht primär wegen der hohen Umdrehungszahl, sondern durch einen Reifenschaden zustande. Dieser kann durch Materialermüdung, häufig aber aufgrund der Verletzung des Profilgewebes durch Fahren über die Randsteine, durch Fahren mit zu niedrigem Reifendruck oder bei LKW durch Fahren mit zu großer Beladung entstehen.

B 9.2 Von welcher Höhe H muss eine Masse m losgelassen werden, damit sie sich auf der kreisförmigen Looping-Bahn (Radius r) gerade noch herumbewegt (Reibungskräfte seien vernachlässigt)?



Die erhaltene Gesamtenergie lässt sich am Ausgangspunkt errechnen als

$$E = m·g·H.$$

Damit am höchsten Punkt des Loopings die Masse nicht herunterfällt, muss die Zentrifugalkraft mindestens gleich der Gewichtskraft sein

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m·g \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g}$$

Außerdem ist die Gesamtenergie ($m·g·H$) für jeden Punkt der Bahn gleich der Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Für den höchsten Punkt der Kreisbahn folgt

$$m·g·H = \frac{m \cdot v^2}{2} + m·g·2·r = \frac{m \cdot r \cdot g}{2} + 2·m·g·r = \frac{5 \cdot m \cdot r \cdot g}{2}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Höhe H als
$\underline{H = 5/2\, r}$.

B 9.3 Ein Auto mit einer Gesamtmasse von 1000 kg fährt mit 70 km/h durch eine Kurve mit einem Krümmungsradius von 100 m. Berechne die Zentrifugalkraft und den maximalen Haftreibungskoeffizienten μ, bei dem das Auto nicht ins Schleudern kommt.

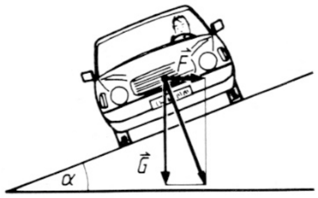
Die Zentrifugalkraft (die Kraft, die man als Mitfahrer spürt) ist zahlenmäßig gleich der Zentripetalkraft, also

$$\underline{F_Z =} \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{1000 \cdot (70/3{,}6)^2}{100}\,\text{N} \underline{= 3800\,\text{N.}}$$

Die Zentripetalkraft muss durch die Reibungskraft F_R erzeugt werden.

$$F_R = \mu·m·g \Rightarrow \mu = \frac{F_Z}{m \cdot g} \qquad \underline{\mu =} \frac{3800}{1000 \cdot 9{,}81} = \underline{0{,}39.}$$

Ist die Fahrbahn erhöht, so kann (je nach Kurvenradius, Masse und Geschwindigkeit) der Erhöhungswinkel so gewählt werden, dass die resultierende Kraft normal zum Untergrund steht, die Bedingungen also wie beim Geradeausfahren sind



$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{G} = \frac{F_Z}{m \cdot g}$$

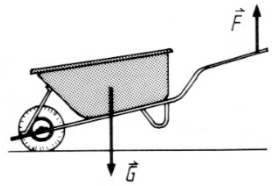
Für das obige Beispiel ergibt dies (tan α = 0,39) einen Winkel von α ≈ 21 Grad.

Übungen

9.1 Eine äußerst schnelle Zentrifuge hat eine Drehzahl von 30000 min^{-1} bei einem Radius von 30 cm. Schätze, um wie viel größer die Zentrifugalbeschleunigung gegenüber der Fallbeschleunigung ist. Schätze vor der Rechnung auch die Kraft, die während der Drehbewegung auf ein Präparat der Masse 2 g wirkt.

9.2 Berechne die Winkelgeschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit der Erde bei ihrer annähernden Kreisbahn um die Sonne (Radius der Erdbahn $r_E = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m).

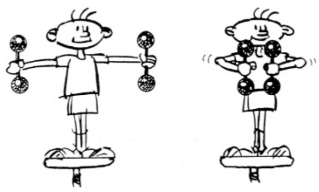
9.3 Der TGV (train à grande vitesse) erreicht als schnellster Zug Frankreichs Höchstgeschwindigkeiten von 260 km/h. Seine Räder haben 92 cm Durchmesser. Welche Drehzahl haben die Räder bei Höchstgeschwindigkeit?



9.4 Der Schwerpunkt einer beladenen Schubkarre ist 60 cm von der Radachse entfernt. Mit welcher Kraft muss an den 1,7 m von der Radachse entfernten Griffen angehoben werden, um eine Masse von 200 kg heben zu können?

9.5 An den Enden einer 2 m langen Stange hängen zwei Körper mit 30 kg und 50 kg Masse. In welchem Punkt muss die Stange unterstützt werden, um sie im Gleichgewicht zu halten,
a) bei einer gewichtslos anzusehenden Stange,
b) bei einer Stange, deren Gewicht von 40 N gleichmäßig verteilt ist?

9.6 Ein Satellit fliegt auf einer Kreisbahn um die Erde. Zeichne den Impuls des Satelliten ein (Bild rechts). Wirkt auf ihn eine Kraft? Wenn ja, zeichne sie ein.



9.7 Franz steht auf einem Drehsessel und hält 2 Hanteln mit je 3 kg in seinen Händen. Er hält seine Arme seitlich und wird von seinen Freunden in eine Rotation von 20 Umdrehungen pro Minute versetzt. Sodann zieht er die Arme ein. Wie schnell dreht er sich nun?
(Trägheitsmoment des Körpers ohne Hanteln: Arme seitlich $I = 3{,}5$ kg·m², Arme vor der Brust $I = 2$ kg·m². Schätze die Abstände der Hanteln zur Drehachse selbst ab.)

9.8 Ein Schwungrad kann auch zur Energiespeicherung dienen. Die Masse ($m = 50$ kg) eines Schwungrades befindet sich zur Gänze am Außenrand des Rades mit Radius $R = 0{,}5$ m. Das Rad kann in eine Rotation von 100 Umdrehungen pro Sekunde gebracht werden. Wie viele Kilowattstunden könnten mit diesem Rad gespeichert werden?

9.9 Warum benötigt ein Hubschrauber zwei Propeller (Hauptrotor und Heckrotor)?

9.10 Eine Masse von $m = 1$ kg gleitet reibungsfrei eine schiefe Ebene mit Höhenunterschied $h = 5$ m hinunter. Auch ein Reifen mit Radius $r = 0{,}2$ m und einer Masse von ebenfalls $m = 1$ kg rollt dieselbe Strecke hinunter. Welche Geschwindigkeiten haben beide Körper am Ende der schiefen Ebene?

9.11 Eine Eisläuferin hält ein 8 m langes Seil in den Händen, welches an einem Holzpflock angebunden ist. Sie fährt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v = 1$ m·s^{-1} die größtmöglichen Kreise, die ihr die Seillänge erlaubt. Mit der Zeit wickelt sich das Seil auf; welche Geschwindigkeit hat sie bei einer Seillänge von 4 m? (Reibungsverluste seien vernachlässigt)

9.12 Welche Arbeit bzw. Leistung ist nötig, um den Rotor eines Motors (Trägheitsmoment $I = 4$ kg · m²) auf eine Drehzahl von $f = 400$ Upm in **a)** 10 s **b)** 1 min gleichmäßig zu beschleunigen.

9.13 Mit welcher Drehzahl muss ein gefüllter Eimer in senkrechter Kreisbahn geschwungen werden, damit keine Flüssigkeit ausfließt? (Armlänge plus Entfernung zur Wasseroberfläche: r = 1,0 m)

9.14 Die Spitze des Stundenzeigers einer Turmuhr hat die Geschwindigkeit 1,8 mm/s. Wie lange ist der Zeiger?

9.15 Ein Flugzeug (m = 900 kg) fliegt einen Looping mit Radius r = 130 m, wobei seine Geschwindigkeit (v = 120 km/h) konstant bleibt.
a) Ist die Belastung auf die Tragflächen in jedem Punkt der Bahn gleich stark?
b) Ist deine Antwort auf Frage a) ja, so berechne diese gleichbleibende Belastung; ist die Antwort nein, so gib an, an welchem Punkt die Belastung maximal ist und wie groß diese Maximalkraft ist.

9.16 *Ein geostationärer Satellit befindet sich immer über demselben Punkt des Äquators. Er rotiert also (in einem Abstand von 42200 km vom Erdmittelpunkt) mit der Erde mit. Welche Winkel- bzw. Bahngeschwindigkeit hat er?*

9.17 Beim Eisschnelllauf ist der Radius der Innenbahn am ovalen Ende 30 m, die der Außenbahn 35 m. Wie viel Zentripetalkraft muss der Athlet auf der Innenbahn mehr aufbringen, um die Kurve durchfahren zu können?

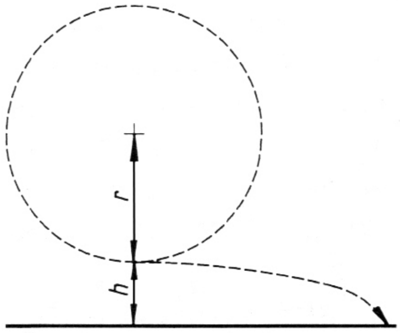
9.18 In zukünftigen Weltraumstationen will man das irdische Schwerefeld simulieren. Aus diesem Grund plant man, den Stationen die Form von riesigen, hohlen Rädern zu geben. Die Wohnräume sollen sich am Außenrand des Rades (Radius r = 100 m) befinden.
a) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss das Rad umlaufen, um außen das irdische Schwerefeld ($g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$) vorzutäuschen?
b) Wie lange benötigt die Station für eine Drehung?
c) Welche Geschwindigkeit (aufgrund der Rotation) hat jeder Körper in den Wohnräumen?

9.19 Beim Schispringen wird der Athlet (m = 80 kg) durch die Krümmung vor dem Schanzentisch in die Anlaufspur gedrückt.
a) Berechne diese zusätzliche Kraft: Die Krümmung ist kreisförmig mit einem Krümmungsradius von 70 m, die Geschwindigkeit des Springers ist 90 km/h.
b) Laut internationaler Regel darf die zusätzliche Beschleunigung durch Krümmungen die Fallbeschleunigung g nicht überschreiten. Wie groß muss der Krümmungsradius zwischen Aufsprung und Auslauf mindestens sein, um diese Forderung zu erfüllen, wenn der Springer eine Maximalgeschwindigkeit von 105 km/h erreichen kann?

9.20 Christian Huygens hat folgende Behauptung aufgestellt: „Ein Körper läuft mit derjenigen Geschwindigkeit auf einem vertikalen Kreis, mit der er am Boden aufschlägt, wenn man ihn aus einem Viertel des Kreisbahndurchmessers fallen lässt. In diesem Fall ist die Zentrifugalkraft gleich dem Gewicht des Körpers." Beweise diese Aussage.

9.21 *(Winkelfunktionen benötigt)*
Um die Zentripetalbeschleunigung aufzubringen, die ein Zug beim Durchfahren einer Kurve braucht, ist die äußere Schiene höher gelegt als die innere. Welche Zentripetalbeschleunigung ergibt sich für einen Kurvenradius von r = 0,8 km, eine Spurbreite b = 1,435 m und eine Erhöhung der äußeren Schiene um h = 9 cm?

9.22 Ein Körper (m = 1 kg) wird auf einem vertikalen Kreis von r = 1 m Radius gedreht. Der tiefste Punkt des Kreises befindet sich 0,5 m über dem Boden. Man dreht den Körper immer schneller, und bei einer bestimmten Drehzahl reißt die Schnur am tiefsten Punkt (siehe Übung 9.15) und der Körper fällt 2 m weit entfernt am Boden auf.



a) Bei welcher Frequenz reißt die Schnur?
b) Welche Kraft konnte die Schnur aushalten?
(**Hinweis:** Die Bewegung in x-Richtung erfolgt nach dem Reißen der Schnur gleichförmig, die Zeitdauer ist durch die Fallhöhe gegeben.)