Herleitung des euklidischen Algorithmus

Vielfaches
Teiller

Wenn eine natürliche Zahl c das Produkt von zwei natürlichen Zahlen a und b ist, dann heißt $c = a \cdot b$ ein **Vielfaches** von a und von b und die Zahlen a und b heißen **Teiler** von c. Wir sagen auch, dass c durch die Zahlen a und b **teilbar** ist.

größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Ein **gemeinsamer Teiler** zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl, die beide teilt.
Der **größte gemeinsame Teiler** zweier natürlicher Zahlen ist die größte Zahl, die beide teilt.
Für den größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen a und b schreiben wir kurz **ggT(a, b)**.

Kürzen können wir durch gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner. Die größte Zahl, durch die gekürzt werden kann, ist daher der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner.

Wie können wir den größten gemeinsamen Teiler berechnen? Überlegen wir zuerst:

- Wir geben zwei positive natürliche Zahlen vor:
  Wenn wir zwei gleiche Zahlen haben, ist nichts zu tun, denn $\mathrm{ggT}(a, a) = a$,
  anderenfalls nennen wir die größere a und die kleinere b.

- Wenn eine natürliche Zahl c die Zahlen a und b teilt, dann teilt sie auch die Zahlen $a + b$ und $a - b$. Denn:
  Wenn c ein Teiler von a und von b ist, dann gibt es natürliche Zahlen s und t so, dass $c \cdot s = a$ und $c \cdot t = b$ ist. Dann ist aber
  $$a + b = c \cdot s + c \cdot t = c \cdot (s + t),$$
  also $a + b$ ein Vielfaches von c. Ebenso ist
  $$a - b = c \cdot s - c \cdot t = c \cdot (s - t),$$
  also $a - b$ ein Vielfaches von c.

- Daraus können wir schließen: Jede Zahl, die ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, ist auch ein gemeinsamer Teiler von $a - b$ und b. Umgekehrt ist jede Zahl, die ein gemeinsamer Teiler von $a - b$ und b ist, auch ein gemeinsamer Teiler von $a = (a - b) + b$ und b.

- Wir können also anstatt $\mathrm{ggT}(a, b)$ zu berechnen, auch $\mathrm{ggT}(a - b, b)$ berechnen. Die größere der zwei Zahlen ist dadurch kleiner geworden. Das wiederholen wir so lange, bis keine der beiden Zahlen mehr größer als die andere ist, also die beiden Zahlen gleich sind. Dann ist diese Zahl gleich $\mathrm{ggT}(a, b)$.

Dieses Verfahren zur Berechnung des ggT von zwei positiven natürlichen Zahlen heißt **euklidischer Algorithmus** und war schon vor mehr als 2 000 Jahren bekannt.
Wir fassen unsere Überlegungen als Rechenverfahren zusammen:

euklidischer Algorithmus

- Gegeben sind zwei positive natürliche Zahlen a und b.

- Solange a und b verschieden sind, ersetze die größere dieser zwei Zahlen durch die Differenz der größeren und der kleineren.

- Sobald a und b gleich sind, ist das Verfahren beendet und diese Zahl ist der gesuchte ggT.