3 Tooltime

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand Oktober 2010)

A1 Auf Seite 19 heißt es in der linken Spalte „Dein Gewicht zeigt immer in Richtung Erdmitte.“. Warum ist das ganz streng genommen nicht exakt formuliert?

A2 Schreibe die beiden eingezeichneten Vektoren aus Abb. 1 als Spaltenvektor an.

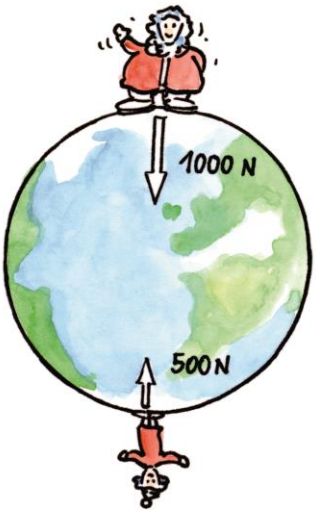


Abb. 1 (Grafik: Janosch Slama; Abb. 3.3, S. 20).

A3 Schreiben die beiden eingezeichneten Vektoren aus Abb. 2 als Spaltenvektor an. Nimm dabei vereinfacht an, dass der linke Vektor einen Winkel von 45° zur Horizontalen hat.

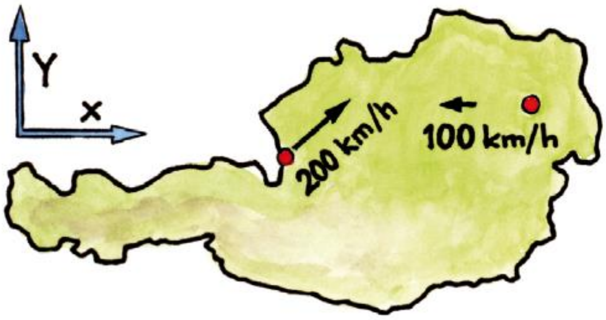


Abb. 2 (Grafik: Janosch Slama; Abb. 3.2, S. 20).

A4 Schreibe die Koordinaten der Vektoren in Abb. 3.5 (S.20) an.

A5 Wie werden Vektoren grafisch addiert? Du schiebst einfach an das Ende des ersten Vektors (die Pfeilspitze) den Anfang des zweiten (den Schaft), und der Summenvektor zeigt dann vom Anfang des ersten Vektors zum Ende des zweiten (siehe dazu Abb. 3.8, S. 21). Wie werden Vektoren rechnerisch addiert? Indem man sowohl die x- als auch die y-Komponenten addiert, also $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Addiere **a)** die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sowie **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ zuerst rechnerisch und dann zur Probe grafisch.

A6 Wie werden zwei Vektoren subtrahiert? Wie kann man das grafisch darstellen?

A7 Um diese Frage beantworten zu können, benötigst du zuerst das Ergebnis von A6. Versuche nun folgende Frage zu beantworten: In Abb. 3 ist die Geschwindigkeitsänderung Δ***v*** eines Autos, das durch eine Kurve fährt. Δ***v*** = $\boldsymbol{v}_2$ – $\boldsymbol{v}_1$. Zeige grafisch, dass diese Darstellung einer Vektorsubtraktion mit der in A6 beschriebenen Version identisch ist.

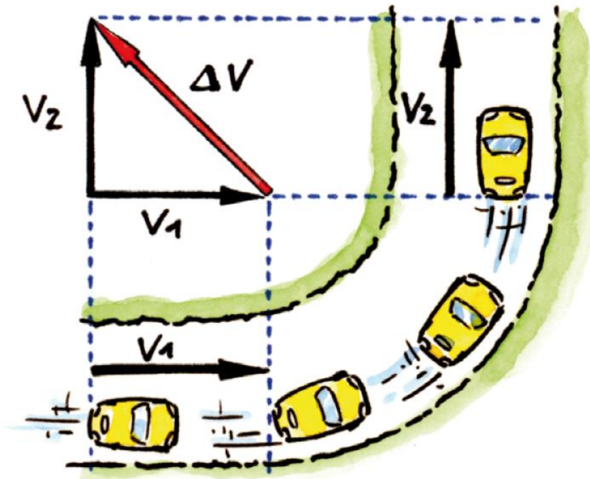


Abb. 3: Der Fahrer fährt durch die Kurve, ohne vom Gas zu gehen. Trotzdem ändert sich die Geschwindigkeit, weil sich der Geschwindigkeitsvektor dreht! Diese Beschleunigung kann der Fahrer spüren (Grafik: Janosch Slama; siehe Abb. 3.6, S. 21).

A8 Schreibe die drei Kraftvektoren aus Abb. 4 an und addiere sie. Nimm dazu an, dass die Kraft jeweils 100 N beträgt. Sieh dir zur Hilfe die Infobox *Mathematik des schiefen Wurfs* auf Seite 53 an.

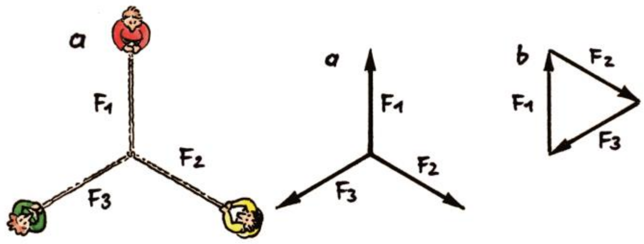


Abb. 4: Addition von drei 2-dimensionalen Vektoren
(Grafik: Janosch Slama; siehe Abb. 3.10, S. 22).

A9 Im Text der Infobox *Bezugssysteme* auf Seite 36 steht: „Wenn du im Flugzeug aus 10 cm Höhe ein Stück Zucker in den Tee fallen lässt, dann legt es für einen Beobachter auf der Erde dabei 35 m in horizontaler Richtung zurück (Abb. 3.12).“. Wie schnell muss das Flugzeug dazu fliegen? Benutze für deine Rechnung die Formel für die Falltiefe beim freien Fall in Kap. 5.4.1, S. 40.

A10 a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Hangabtriebskraft und der Hangabtriebsbeschleunigung? Lies zur Hilfe in Kapitel 3.3, S. 23 nach.
b) Der Neigungswinkel der schiefen Ebenen in Abb. 5 ist 30 ° und 15 °. Um welchen Faktor ist die Beschleunigung im Vergleich zum freien Fall verringert? **c)** Versuche den Zusammenhang zwischen der Hangabtriebsbeschleunigung, der Fallbeschleunigung und dem Winkel der schiefen Ebene allgemein zu formulieren und zeichne dazu ein Diagramm (x-Achse: Winkel, y-Achse relative Fallbeschleunigung). **d)** Welchen Winkel muss die schiefe Ebene haben, damit man mit ihr die Fallbeschleunigung am Mond simulieren kann? Lies vorher in Kap. 5.4 auf S. 39 nach.

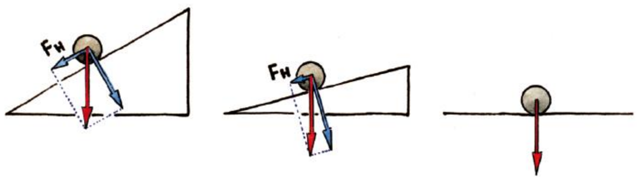


Abb. 5: Die **Hangabtriebkraft F_H** wird kleiner,
je weniger stark die Ebene geneigt ist
(Grafik: Janosch Slama; siehe Abb. 3.17, S. 23).

A11 Überlege, wie man den Zusammenhang zwischen Gewichtskraft und Kraft am Seil allgemein mathematisch formulieren könnte. Tipp: Die Kräfte bilden Seiten und Diagonale einer Raute. Zeichne dann ein Diagramm, das diesen Zusammenhang zeigt (x-Achse Winkel, y-Achse relative Kraft).

Hilfe zu A1: Die Gewichtskraft würde nur dann ganz genau in Richtung Erdmitte zeigen, wenn die Masse der Erde völlig symmetrisch verteilt wäre. Das ist aber nicht der Fall. Diese kleinen Abweichungen von der Symmetrie kann man auch sehr gut sehen, wenn man sich die Abweichung der Fallbeschleunigung vom theoretischen Wert ansieht (Abb. 6). Wenn du also zum Beispiel in der Nähe eines Berges stehst, dann zeigt die Gewichtskraft nicht genau senkrecht zu Boden, sondern ein bisschen in Richtung des Berges.

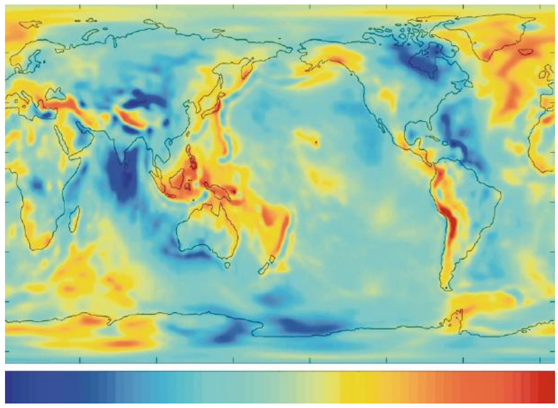
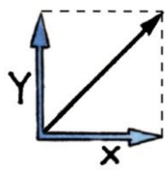


Abb. 6: Abweichung zwischen dem theoretischen Wert von *g* und dem tatsächlichen. In roten Bereichen ist der gemessene Wert höher, in blauen tiefer als vorhergesagt
(Abb. 5.18, Kap. 5.4.1, S. 39).

Hilfe zu A2: Der Gewichtskraftvektor von Herrn Müller lautet $\begin{pmatrix} 0 \\ -1000\ \mathrm{N} \end{pmatrix}$, der Gewichtskraftvektor von Frau Mayer lautet $\begin{pmatrix} 0 \\ 500\ \mathrm{N} \end{pmatrix}$.

Hilfe zu A3: Der rechte Vektor hat keine y-Komponente und eine x-Komponente von 100 km/h: $\begin{pmatrix} 100\ \mathrm{km/h} \\ 0 \end{pmatrix}$.



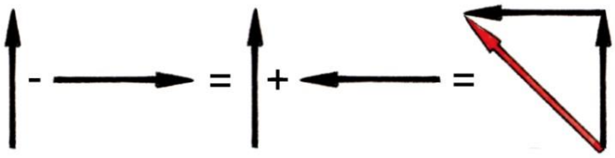
Den linken Vektor und seine beiden Komponenten kann man sich als die Seiten und die Diagonale eines Quadrats vorstellen. Die Diagonale ist immer um den Faktor $\sqrt{2}$ länger als die Seiten. Das bedeutet umgekehrt, dass die Seiten um den Faktor $\sqrt{2}$ kürzer sind. Der Vektor lautet daher $\begin{pmatrix} \frac{200}{\sqrt{2}}\ \mathrm{km/h} \\ \frac{200}{\sqrt{2}}\ \mathrm{km/h} \end{pmatrix}$.

Eine andere Möglichkeit wäre die Darstellung mit Hilfe von Winkelfunktionen: $\begin{pmatrix}\cos 45° \cdot 200\ \text{km/h} \\ \sin 45° \cdot 200\ \text{km/h}\end{pmatrix}$.

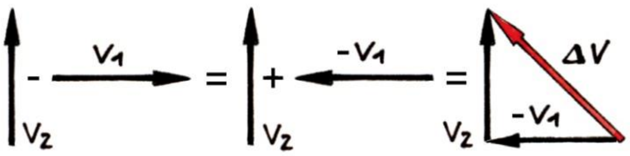
Hilfe zu A4: Die Vektoren a und b lauten $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, Vektor c lautet $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, Vektor d lautet $\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

Hilfe zu A5:
a) $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ und c) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Hilfe zu A6: Wie werden Vektoren rechnerisch subtrahiert? Indem man sowohl die x- als auch die y-Komponenten subtrahiert, also $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix}$. Man kann das aber auch anders anschreiben, nämlich $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_2\\-y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix}$. Grafisch kann man daher Vektoren subtrahieren, indem man einen Vektor umdreht und danach beide Vektoren addiert.



Hilfe zu A7: Man kann die beiden Pfeile auch anders zusammenhängen:



Um zwei Vektoren grafisch zu subtrahieren, kann man daher auch ihre beiden Schäfte (Anfänge) zusammenschieben und die beiden Spitzen verbinden (wie etwa in Abb. 3 auf Seite 1).

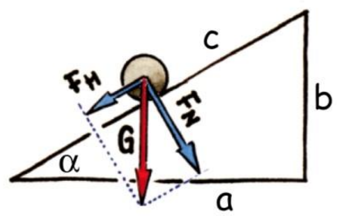
Hilfe zu A8: Wenn die Kraft 100 N beträgt, dann ist $F_1 = \begin{pmatrix}0\\100\ \text{N}\end{pmatrix}$. Weil der Winkel zwischen den Kräften 120° beträgt, beträgt der Winkel zwischen der Horizontalen und den Kräften F_2 bzw. F_3 30°. Auf Seite 68 siehst du, wie man einen Vektor mit Hilfe von Winkelfunktionen in seine beiden Komponenten zerlegt. Daraus ergibt sich für die beiden Vektoren

$F_2 = \begin{pmatrix}100 \cdot \cos 30°\ \text{N}\\-100 \cdot \sin 30°\ \text{N}\end{pmatrix}$ und $F_3 = \begin{pmatrix}-100 \cdot \cos 30°\ \text{N}\\-100 \cdot \sin 30°\ \text{N}\end{pmatrix}$.

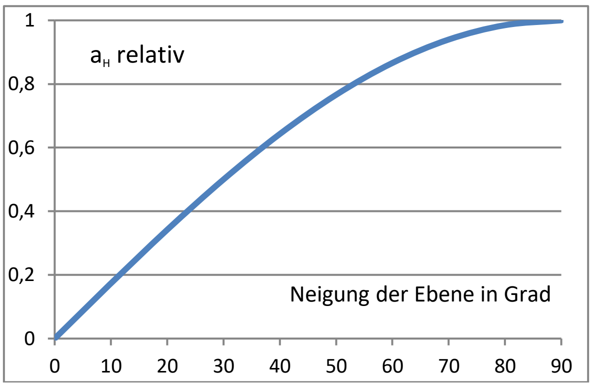
Weil der sin(30) = 0,5 ist, können wir vereinfacht anschreiben:
$F_2 = \begin{pmatrix}100 \cdot \cos 30°\ \text{N}\\-50\ \text{N}\end{pmatrix}$ und $F_3 = \begin{pmatrix}-100 \cdot \cos 30°\ \text{N}\\-50\ \text{N}\end{pmatrix}$.
Wenn du nun F_1 bis F_3 addierst, erhältst du einen Nullvektor.

Hilfe zu A9: Die Formel für die Falltiefe beim freien Fall lautet $s = {}^{g}/_{2}\, t^2$. Daraus folgt $t = \sqrt{{}^{2s}/_{g}}$. Wenn man für s = 0,1 m einsetzt und für g = 9,81 m/s², ergeben sich für die Fallzeit 0,143 s. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt daher 35 m durch 0,143 s oder 245 m/s (882 km/h).

Hilfe zu A10: a) Nach dem zweiten Grundgesetz von NEWTON gilt $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$. Daher ist die Hangabtriebsbeschleunigung proportional zur Hangabtriebskraft.
b) Der Zusammenhang zwischen c und b lautet b = c·sin α. Das Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie das Dreieck mit $\boldsymbol{F}_N$, $\boldsymbol{F}_H$ und $\boldsymbol{G}$ sind ähnliche Dreiecke (siehe Abb. Unten rechts). Daher gilt auch $\boldsymbol{F}_H = \boldsymbol{G} \cdot \sin\alpha$. Bei 30 ° Neigung ist somit die Hangabtriebsbeschleunigung nur mehr halb so groß (sin 30° = 0,5), bei 15° beträgt sie nur mehr etwa ein Viertel (sin 15° = 0,26).



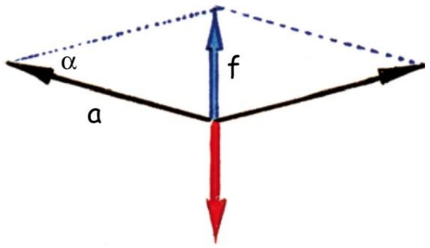
c) $\boldsymbol{F}_H = m \cdot \boldsymbol{a}_H = \boldsymbol{G} \cdot \sin\alpha = m \cdot \boldsymbol{g} \cdot \sin\alpha$. Daraus folgt $\boldsymbol{a}_H = \boldsymbol{g} \cdot \sin\alpha$. Wenn man die Beschleunigung relativ nimmt und $g = 1$ setzt, bekommt man $a_H = \sin\alpha$.



d) Die Fallbeschleunigung am Mond beträgt etwa ein Sechstel von g (Anm.: Genau sind es 1,62 m/s²) . Will man diese Fallbeschleunigung auf der Erde simulieren, muss die Hangabtriebsbeschleunigung 1/6 g sein, also $a_H = g/6$. Man kann daher allgemein aufschreiben:

$a_H = g/6 = g \cdot \sin \alpha$. Daraus folgt $\sin \alpha = 1/6$ und $\alpha = \arcsin(1/6) \approx 9{,}6°$.

Hilfe zu A11: In der Abbildung unten siehst du noch einmal die Kräfteverhältnisse am gespannten Seil. Die beiden Kräfte am bzw. im Seil (schwarz) und die Gesamtkraft (blau) bilden zwei Seiten (a) sowie die kurze Diagonale (f) einer Raute.



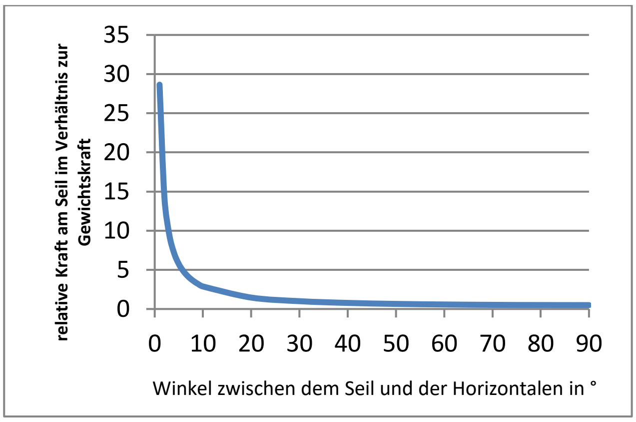
Zwischen α, a und f gilt folgender Zusammenhang:

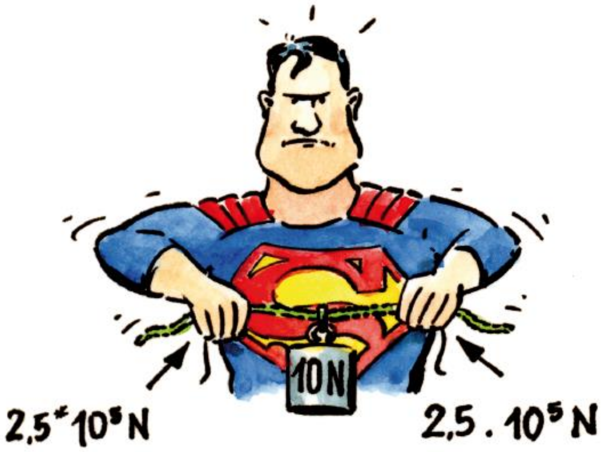
$$f = 2a \cdot \sin(\alpha/2) \text{ oder } a = f/[2 \cdot \sin(\alpha/2)].$$

Die kurze Diagonale f entspricht längenmäßig dem Gewicht, also in unserem Beispiel 10 N, a der jeweiligen Kraft in den Seilen. Daher ergibt sich:

$$F_{Seil} = 10\ \text{N}/[2 \cdot \sin(\alpha/2)].$$

Hängt das Seil komplett durch ($\alpha = 90°$), ist die pro Seil benötigte Kraft 5 N (siehe Abb. 4.14, S. 38). Wollte man das Seil komplett spannen ($\alpha = 0°$), wäre eine unendlich große Kraft nötig, weil $1/\sin(0) = \infty$. Grafisch lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Winkel des Seils zur Horizontalen (α/2) und der benötigten relativen Kraft wie unten darstellen. Der Graph ist ab einem Winkel von 1° eingezeichnet. Bei diesem ist schon die knapp 29-fache Kraft aufzuwenden.





Nicht einmal Superman kann den Faden komplett spannen. Er ist zwar saustark, hat aber eben nicht unendlich viel Kraft. (Grafik: Janosch Slama; siehe Abb. 3.20, S. 24)