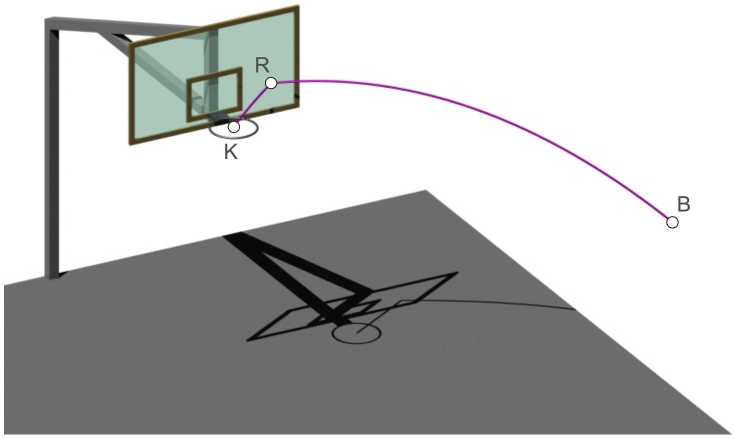
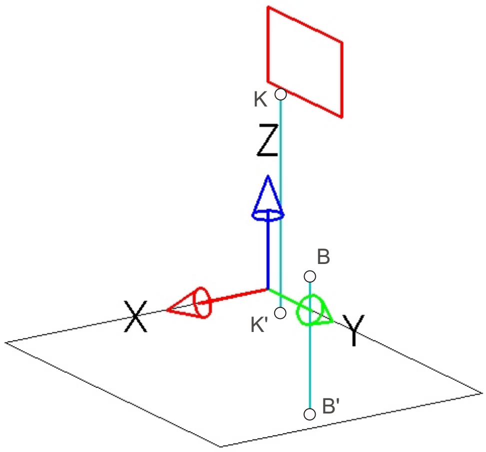
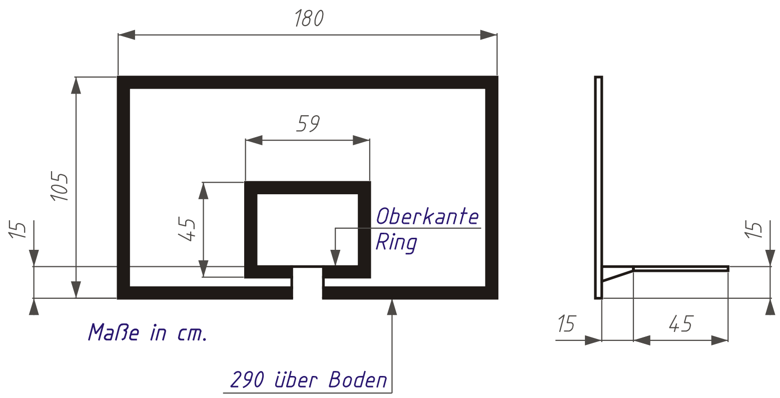
Basketballwurf

Ein Basketballspieler wirft den Ball aus der Position B so ab, dass der Ball zuerst das Brett im Punkt R trifft und danach genau in den Mittelpunkt K des Korbrings fällt. Der Höhenwinkel beim Abwurf beträgt 40°.
Zeichne die Flugbahn und konstruiere ihren höchsten Punkt!

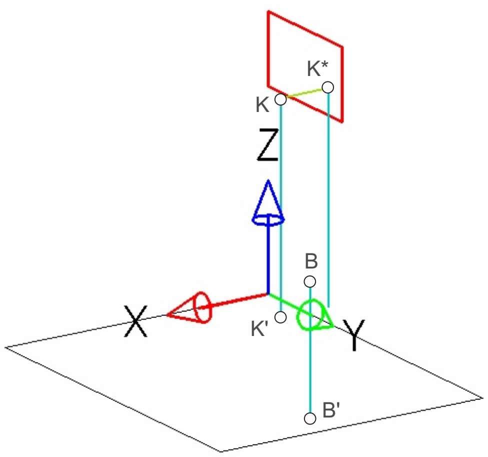


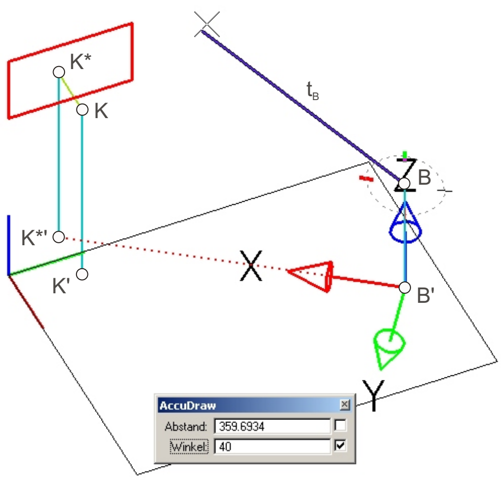
1) Wir beschränken uns hier auf die Konstruktion der Flugbahn. Für das Brett und die Halterung brauchst du sicher keine Erklärung.
Zeichne zuerst in der yz-Ebene ein 290 cm über dem Boden liegendes Rechteck (180 x 105)! Der Punkt B soll 200 cm vor dem Brett, 380 cm seitlich (gemessen von der Mitte) und 190 cm hoch liegen. Die Lage des Punktes K kannst du der Skizze entnehmen. Zeichne B und K als Endpunkte lotrechter Strecken ein!



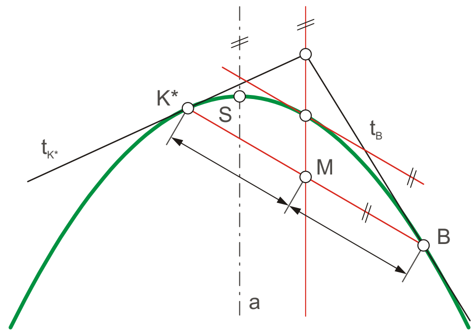


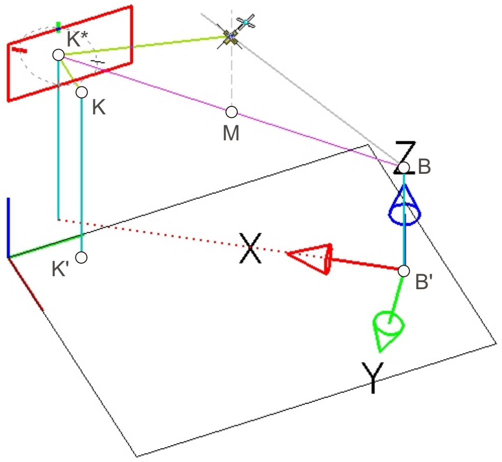
2) Aus dem Physikunterricht weißt du, dass die Bahnkurve bei einem schrägen Wurf (unter idealisierten Bedingungen) eine Parabel mit lotrechter Achse ist. Das „Reflexionsgesetz” am Brett lautet „Einfallswinkel = Ausfallswinkel”.
Da der Ball im Punkt R vom Brett reflektiert wird, besteht die Flugbahn also aus zwei Parabelbögen: von B bis R bzw. von R bis K. Aus dem genannten Reflexionsgesetz lässt sich folgern:
Spiegelt man den Parabelbogen zwischen R und K am Brett, so liegt der gespiegelte Bogen auf der Verlängerung des Parabelbogens von B nach R.
Spiegle also den Punkt K am Brett; dies liefert K*. Der Parabelbogen von B nach R liegt in der erstprojizierenden Ebene durch B und K*.
Platziere ein BKS (Ursprung B', x-Achse durch K*', z-Achse durch B) und zeichne die unter 40° ansteigende „Starttangente” – also die Tangente der Parabel im Punkt B – ein. (Die Drehung der AccuDraw-Ebene im BKS erfolgt mit der Taste „E”, das Umschalten zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten erfolgt mit der Leertaste.)

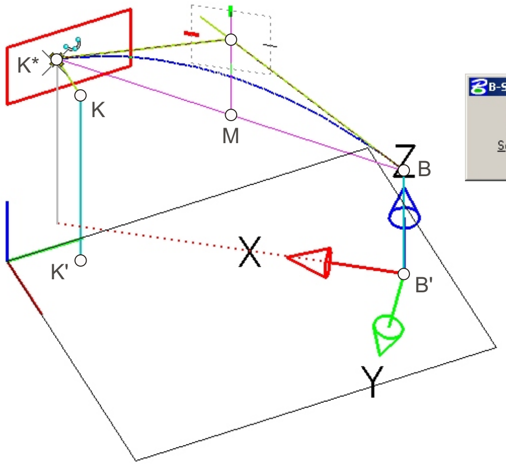




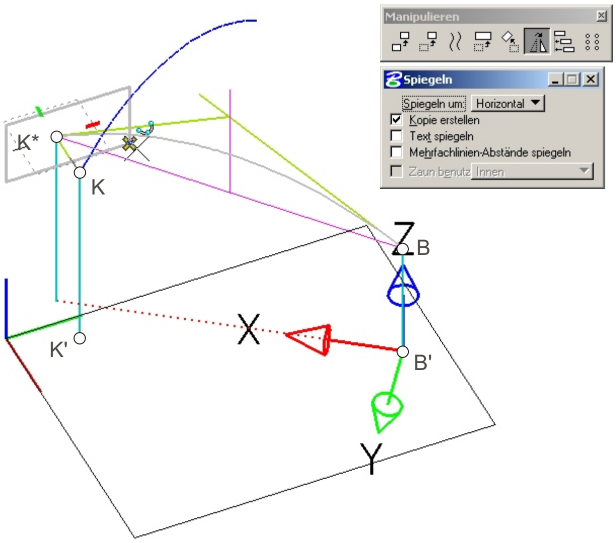
3) Durch die Punkte B und K*, die Tangente in B und die Achsenrichtung (lotrecht) ist der Parabelbogen von B nach K* eindeutig festgelegt.
Zur Konstruktion der Tangente in K* verwenden wir die in der Skizze illustrierte Parabeleigenschaft: Eine Parabel ist nicht nur orthogonal symmetrisch zu ihrer Achse a, sondern auch schief symmetrisch zu jeder achsenparallelen Geraden.
Konstruiere nun den Parabelbogen von B nach K* als B-Splinekurve vom Grad 2 mit dem Werkzeug „B-Spline-Kurve platzieren" aus dem Werkzeugkasten „Kurven erstellen"!

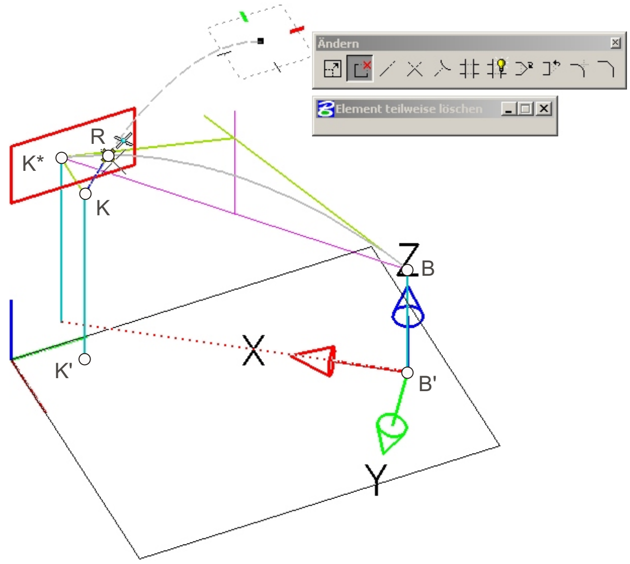




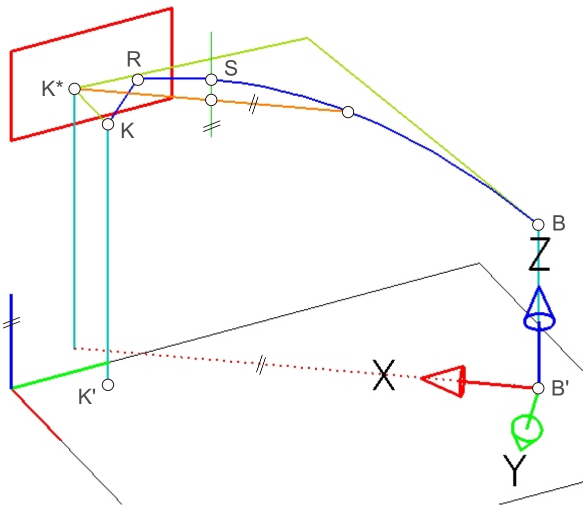


4) Spiegle die Parabel am Brett (mit dem Werkzeug „Spiegeln" aus der Hauptpalette; Kopie erstellen; achte auf die Lage von AccuDraw) und lösche die überflüssigen Teile der Parabelbögen (mit dem Werkzeug „Element teilweise löschen" aus der Hauptpalette)!

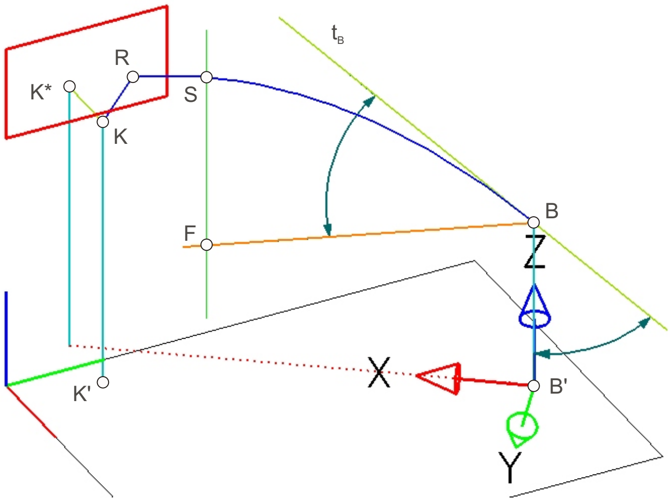




5) Der höchste Punkt der Flugbahn ist der Parabelscheitel S. Konstruiere diesen Punkt mit Hilfe der orthogonalen Symmetrie der Parabel: Schneide die x-parallele Gerade durch K* mit der Parabel, halbiere die entstehende Parabelsehne und schneide die lotrechte Gerade durch den Halbierungspunkt (also die Parabelachse) mit der Parabel.



Ein Ausflug in die Physik

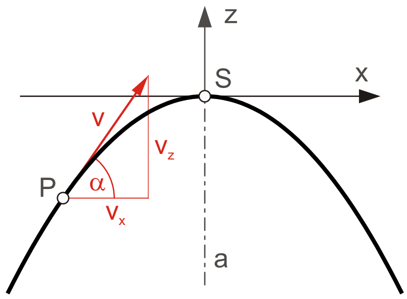


Bei welcher Abwurfgeschwindigkeit wird die soeben konstruierte Flugbahn eingehalten?

Für die Berechnung der Abwurfgeschwindigkeit v_0 ist die Kenntnis des Parabelparameters p (doppelter Abstand von Scheitel und Brennpunkt) erforderlich. Der Brennpunkt F wird mit Hilfe der bekannten Reflexionseigenschaft der Parabel konstruiert, wonach achsenparallele Strahlen durch den Brennpunkt reflektiert werden. Für p ergibt sich 394,88cm.
Die Berechnung von v_0 erfolgt nach einer weiter unten hergeleiteten Formel:

$$v_0 = \frac{\sqrt{g \cdot p}}{\cos \alpha_0} = \frac{\sqrt{9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2} \cdot 3{,}95\ \mathrm{m}}}{\cos 40°} \approx 8{,}13 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 29{,}3 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

(Hier ist g die Erdbeschleunigung und α_0 die Größe des Abwurfwinkels.)



Wenn wir ein xz-Koordinatensystem so an die Flugbahn anpassen wie es die Skizze zeigt, so lautet die Gleichung der Parabel bekanntlich $x^2 = -2pz$.
Wir zerlegen die Flugbewegung nun in eine waagrechte und in eine lotrechte Komponente x = x(t) und z = z(t), die wir uns in Abhängigkeit von der Zeit t erfasst denken. Die Bahngeschwindigkeit v in jedem Bahnpunkt P setzt sich aus einer waagrechten Komponente v_x und einer lotrechten Komponente v_z zusammen, die durch Differenzieren berechnet werden können:

$$v_x = \dot{x}(t),\ v_z = \dot{z}(t)$$

Die Beschleunigungskomponenten a_x und a_y erhalten wir durch nochmaliges Differenzieren:

$$a_x = \ddot{x}(t),\ a_z = \ddot{z}(t)$$

Da auf den Ball ausschließlich die Erdbeschleunigung wirkt, ist $a_x = 0$ und $a_z = -g$. Mit dem folgenden Rechengang lässt sich nun eine Formel für die Geschwindigkeitskomponente v_x herleiten:

$$\begin{aligned} x^2 &= -2pz && |d \\ 2x\dot{x} &= -2p\dot{z} && |d \\ x\ddot{x} + \dot{x}^2 &= -p\ddot{z} \\ \dot{x}^2 &= -p \cdot (-g) \\ \dot{x} &= \sqrt{p \cdot g} \end{aligned}$$

Wenn wir den Neigungswinkel der Bahntangente mit α bezeichnen, so gilt daher für die Bahngeschwindigkeit v in jedem Bahnpunkt P folgende Formel:

$$v = \frac{\sqrt{p \cdot g}}{\cos \alpha}$$

Verwende für die Erzeugung realistischer Bilder die Originalmaße:

- Brettdicke: 3 cm
- Linienbreite: 5 cm
- Die Korbstütze muss mind. 320 cm hinter dem Brett am Boden befestigt sein.