

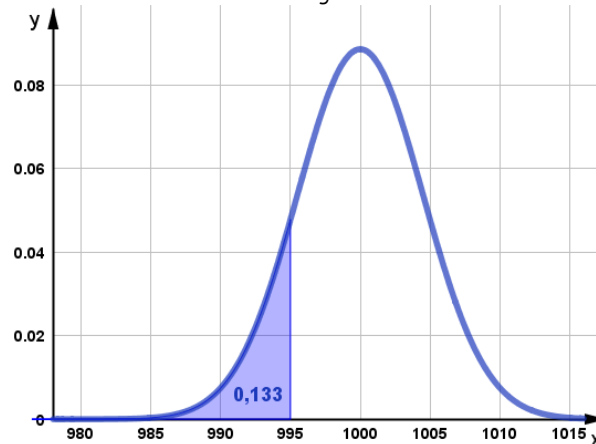
## Ich kann praxisorientierte Aufgabenstellungen aus Wirtschaft, Alltag und Wissenschaft mithilfe der Binomial- und Normalverteilung lösen.

- A, B, C **1** Etwa 1,8% aller Personen, die in Wien öffentliche Verkehrsmittel benutzen, fahren ohne gültigen Fahrschein. Bei einer Fahrkartenkontrolle in der Station Wien *Mitte – Landstraße* werden 245 Personen überprüft.
- a. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei dieser Überprüfung mehr als sechs Personen ohne Fahrschein angetroffen werden.
  - b. Berechne, wie viele Personen man mindestens überprüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestens eine Person ohne Fahrschein anzutreffen.
  - c. Interpretiere, was mit dem Term  $\binom{50}{47} \cdot 0,982^{47} \cdot 0,018^3$  in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.
- A, B, C **2** Auf der Website des ebook-Anbieters „e-bookUnlimited“ kann man ebooks kaufen und direkt im epub-Format downloaden. Erfahrungsgemäß sind die heruntergeladenen epub-Dateien in 4% aller Fälle beschädigt und können dadurch nicht auf den mobilen Endgeräten (z.B. e-Reader, Handy, Tablet) der Kundinnen und Kunden geöffnet werden. „e-bookUnlimited“ verkauft etwa 18 000 ebooks pro Jahr.
- a. Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl der beschädigten Dateien in einem Jahr.
  - b. Da die Standardabweichung größer 3 ist, darf hier die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden. Berechne unter Verwendung der Normalverteilung, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass höchstens 760 Dateien beschädigt und damit unbrauchbar sind.
  - c. Erkläre, wie man die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 667 und 773 Dateien beschädigt sind, mithilfe der Normalverteilung abschätzen kann.
- A, B, D **3** Auf einem Feuerwehrfest gibt es ein Glücksrad. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einmaligem Drehen des Glücksrades gewinnt, beträgt 12%.
- a. An einem Abend wird das Glücksrad etwa 360-mal gedreht. Berechne, wie viele Gewinne durchschnittlich an so einem Abend vergeben werden.
  - b. Am letzten Abend des Feuerwehrfestes sind nur noch 7 Gewinne übrig. Der Betreiber des Glücksrads überlegt, wie viele Menschen wohl noch am Glücksradspiel teilnehmen können, bis alle Gewinne vergeben sind. Er behauptet: „50 Personen kann ich auf jeden Fall noch das Glücksrad drehen lassen. Es ist total unwahrscheinlich, dass dabei mehr als sieben Personen gewinnen.“ Argumentiere, ob der Betreiber des Glücksrads mit seiner Aussage recht hat.
  - c. Der Bürgermeister des Ortes bezahlt seinen Enkelkindern insgesamt 10 Runden am Glücksrad. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kinder mindestens einen Gewinn mit nach Hause nehmen.
  - d. Berechne, wie oft man am Glücksrad drehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens einen Gewinn zu erhalten.

## Ich kann praxisorientierte Aufgabenstellungen aus Wirtschaft, Alltag und Wissenschaft mithilfe der Binomial- und Normalverteilung lösen.

A, B, D **4** In einer Imkerei werden verschiedene Sorten Honig maschinell abgefüllt. Die Sollmenge in einem Glas Blütenhonig beträgt 1 kg. Die tatsächliche Füllmenge ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 1000 g und einer Standardabweichung von 4,5g.

**a.** In der Abbildung ist die Dichtefunktion der Füllmenge dargestellt. Interpretiere die in der Abbildung farbig gekennzeichnete Fläche im Sachzusammenhang.



**b.** Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Glas Blütenhonig mindestens 997 g Honig enthält.

Um die Einstellung der Abfüllmaschine zu überprüfen, werden regelmäßig Kontrollen durchgeführt. Die letzte Überprüfung hat ergeben, dass etwa 56% der getesteten Gläser höchstens 1000 g Honig und rund 11,5% der getesteten Gläser mehr als 1005 g Honig enthielten.

**c.** Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung der kontrollierten Gläser. Runde die Ergebnisse dabei auf eine Nachkommastelle.

**d.** Wenn der Anteil der Honiggläser mit einer Füllmenge von weniger als 994 g größer als 10% ist, muss die Maschine neu eingestellt werden. Verwende deine Ergebnisse aus Aufgabe **c.** und argumentiere, ob die Maschine neu eingestellt werden muss.

## Lösungen zu:

Ich kann praxisorientierte Aufgabenstellungen aus Wirtschaft, Alltag und Wissenschaft mithilfe der Binomial- und Normalverteilung lösen.

- 1 a.  $X$  gibt die Anzahl der Personen ohne gültigen Fahrschein an.  $X$  ist binomialverteilt mit  $n = 245$  und  $p = 0,018$ .

$$P(X > 6) = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 0,1558$$

- b. Man muss mindestens  $n = 254$  Personen kontrollieren.

[ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,982^n$ ; Lösen der Gleichung  $1 - 0,982^n = 0,99$  nach der Anzahl  $n$  der zu überprüfenden Personen liefert das Ergebnis.]

- c. Mit dem Term wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von 50 Personen genau 47 einen gültigen Fahrschein besitzen.

- 2 a.  $\mu = 18\,000 \cdot 0,04 = 720$  beschädigte Dateien,  $\sigma = \sqrt{720 \cdot 0,96} = 26,29 \dots$

$$b. P(X \leq 760) = \Phi\left(\frac{760,5 - 720}{26,29}\right) = 0,9383$$

[Da hier die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert wird, verwendet man 760,5 statt 760; vgl. Abschnitt 2.5.]

- c. Das Intervall  $[667; 773]$  entspricht etwa dem Intervall  $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ . Für eine (annähernd) normalverteilte Zufallsvariable gilt, dass etwa 95% aller Werte einen Abstand von höchstens  $2\sigma$  vom Erwartungswert haben. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 667 und 773 Dateien beschädigt sind, etwa 95%.

- 3 a. Erwartungswert  $\mu = 43,2$ , d.h. es werden durchschnittlich 43 Gewinne vergeben.

- b. Der Betreiber des Glücksrades hat unrecht: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Wiederholungen mehr als 7 (d.h. mindestens 8) Gewinne erzielt werden, beträgt  $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0,2467$ . Dabei ist  $X$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $n = 50$  und  $p = 0,12$ , die die Anzahl der Gewinne beschreibt. Das Ereignis, dass mehr als 7 Gewinne erzielt werden, ist demnach sicherlich nicht als „total unwahrscheinlich“ zu bezeichnen.

- c.  $X$  ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $n = 10$  und  $p = 0,12$ , die die Anzahl der Gewinne beschreibt.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,88^{10} = 0,7215$ . Die Enkelkinder des Bürgermeisters nehmen also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 72% mindestens einen Gewinn mit nach Hause.

- d. Man muss das Glücksrad mindestens 24 Mal drehen.

[ $X$  ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $n$  und  $p = 0,12$ .

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,88^n$ . Lösen der Gleichung  $1 - 0,88^n = 0,95$  liefert das gewünschte Ergebnis.]

- 4 a. Die farbig gekennzeichnete Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewähltes Honigglas weniger als 995g Honig beinhaltet. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 13%. oder: Etwa 13% aller Honiggläser haben eine Füllmenge von höchstens 995 g.

$$b. P(X \geq 997) = 0,7475$$

$$c. \mu \approx 999,3 \text{ g} \quad \sigma \approx 4,8 \text{ g}$$

[Da sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung gesucht sind, benötigt man zwei

Gleichungen. Aus  $\Phi\left(\frac{1000 - \mu}{\sigma}\right) = 0,56$  erhält man  $\frac{1000 - \mu}{\sigma} = 0,1510$ , aus  $\Phi\left(\frac{1005 - \mu}{\sigma}\right) = 0,885$  erhält man

$\frac{1005 - \mu}{\sigma} = 1,2004$ . Lösen des Gleichungssystems ergibt Erwartungswert und Standardabweichung.]

Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung der kontrollierten Gläser.

- d. Mit Erwartungswert und Standardabweichung aus Aufgabe c. erhält man  $P(X \leq 994) = 0,1348$ . Der Anteil der Honiggläser mit einer geringeren Füllmenge als 994 g ist somit größer als die tolerierten 10%. Daher muss die Maschine neu eingestellt werden.