

4 DIE NORMALVERTEILUNG

- W 4.01** Was versteht man unter einer diskreten Zufallsvariablen? Gib ein Beispiel an!
- W 4.02** Was versteht man unter der Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X ?
- W 4.03** Wie können Wahrscheinlichkeiten von diskreten Zufallsvariablen grafisch dargestellt werden?
- W 4.04** Was versteht man unter einer stetigen Zufallsvariablen? Gib ein Beispiel an!
- W 4.05** Was versteht man unter der Dichtefunktion bzw. der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen?
- W 4.06** Wie können Wahrscheinlichkeiten von stetigen Zufallsvariablen grafisch dargestellt werden?
- W 4.07** Was versteht man unter der Gauß'sche Glockenkurve? Wovon hängt deren Form ab?
- W 4.08** Was versteht man unter einer normalverteilten Zufallsvariablen X ?
- W 4.09** Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ und seien $c, d \in \mathbb{R}$. Wie berechnet man $P(X \leq c)$, $P(X \geq c)$ und $P(c \leq X \leq d)$?
- W 4.10** Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ und seien $c, d \in \mathbb{R}$. Wie berechnet man $P(X \in I)$ und $P(X \notin I)$, wenn $I = [\mu - d; \mu + d]$ ist?
- W 4.11** Für eine annähernd normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ werden Werte durch häufige Versuchsdurchführung ermittelt. Wie viel Prozent der Werte liegen voraussichtlich in den angegebenen Intervallen $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, $[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma]$ und $[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma]$?
- W 4.12** Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ . Beschreibe, wie man $c \in \mathbb{R}$ ermitteln kann, sodass $P(X \leq c) = 0,6$, $P(X \geq c) = 0,6$ bzw. $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 0,6$ gilt!
- W 4.13** Unter welchen Voraussetzungen darf man eine Binomialverteilung näherungsweise durch eine Normalverteilung ersetzen? Formuliere den zugrundeliegenden Satz und gib eine Faustregel an!



- W 4.01 Diskrete Zufallsvariablen X können endlich viele oder abzählbar viele Werte a_1, a_2, a_3, \dots annehmen. Dies bedeutet, dass man die Werte von X mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren kann, zB: Augensummen beim Würfeln.
- W 4.02 Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit den Werten a_1, a_2, a_3, \dots .
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P: a_i \mapsto P(a_i)$ ordnet jedem Wert a_i der Zufallsvariablen X dessen Wahrscheinlichkeit $P(a_i)$ zu.
Die Verteilungsfunktion $F: a_i \mapsto P(X \leq a_i)$ ordnet jedem Wert a_i der Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit zu, dass X höchstens den Wert a_i annimmt.
- W 4.03 Wahrscheinlichkeitsfunktionen bzw. Verteilungsfunktionen können zB als Stabdiagramm grafisch dargestellt werden.
- W 4.04 Stetige Zufallsvariablen X können unendlich viele, nicht abzählbare Werte annehmen, zum Beispiel alle Werte in einem Intervall (welches auch ganz \mathbb{R} sein kann), zB: Füllmengen.
- W 4.05 Sei X eine stetige Zufallsvariable und f eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:
 ■ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
 ■ $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$
 ■ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
 Dann ist f die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder kurz Dichtefunktion der Zufallsvariablen X . Die Funktion f gestattet es, für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ als Inhalt der von f in $(-\infty; x]$ festgelegten Fläche zu ermitteln.
 Die Funktion $F: x \mapsto P(X \leq x)$ heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X .
- W 4.06 Eine Wahrscheinlichkeit der Form $P(X \leq x)$ für eine stetige Zufallsvariable X kann als Inhalt einer Fläche unter dem Graphen einer passenden Funktion f dargestellt werden.
- W 4.07 Als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$.
Die Form des Graphen hängt von den Parametern μ und σ ab.
- W 4.08 Eine Zufallsvariable X , deren Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine Gauß'sche Glockenkurve mit den Parametern μ und σ beschrieben werden kann, heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bezeichnet man als Normalverteilung mit den Parametern μ und σ .
- W 4.09
 ■ $P(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
 ■ $P(X \geq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
 ■ $P(c \leq X \leq d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
- W 4.10 $P(\mu - d \leq X \leq \mu + d) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu+d-\mu}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - 1$
- W 4.11 Im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen ca. 68,3%, im Intervall $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ ca. 95,4% und in $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ ca. 99,7% der Werte.
- W 4.12 Für $P(X \leq c) = 0,6$: Man setzt $c = \mu + z \cdot \sigma$ und verwendet die Formel $P(X \leq \mu + z \cdot \sigma) = \Phi(z)$.
Aus $\Phi(z) = 0,6$ folgt $z \approx 0,25$. Damit erhält man: $c \approx \mu + 0,25 \cdot \sigma$.
Für $P(X \geq c) = 0,6$: Man setzt $c = \mu + z \cdot \sigma$ und verwendet die Formel $P(X \geq \mu + z \cdot \sigma) = \Phi(-z)$.
Aus $\Phi(-z) = 0,6$ folgt $z \approx -0,25$. Damit erhält man: $c \approx \mu - 0,25 \cdot \sigma$.
Für $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 0,6$: Man setzt $c = z \cdot \sigma$ und verwendet die Formel $P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(z) - 1$.
Aus $2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0,6$ folgt $z \approx 0,84$. Damit erhält man: $c \approx 0,84 \cdot \sigma$.
- W 4.13 Ist n genügend groß, dann kann eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p näherungsweise durch eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ ersetzt werden.
Faustregel: Eine Binomialverteilung darf näherungsweise durch eine Normalverteilung ersetzt werden, wenn gilt: $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$.

