10 GERADEN UND EBENEN IM RAUM

W 10.01 Kann man eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch eine Parameterdarstellung angeben? Wenn ja, wie lautet eine solche Darstellung?

W 10.02 Kann man eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch eine Normalvektordarstellung angeben? Wenn ja, wie lautet eine solche Darstellung?

W 10.03 Kann man eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch eine Parameterdarstellung angeben? Wenn ja, wie lautet eine solche Darstellung?

W 10.04 Kann man eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch eine Normalvektordarstellung angeben? Wenn ja, wie lautet eine solche Darstellung?

W 10.05 Eine Ebene sei durch eine Parameterdarstellung $X = P + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$ gegeben. Welche Beziehung besteht zwischen den Paaren $(u \mid v)$ reeller Zahlen und den Punkten X der Ebene?

W 10.06 Welche gegenseitigen Lagen im Raum können zwei Geraden einnehmen? Erläutere, wie man die gegenseitige Lage sowie den Durchschnitt ermitteln kann!

W 10.07 Welche gegenseitigen Lagen im Raum können eine Gerade und eine Ebene einnehmen? Erläutere, wie man die gegenseitige Lage sowie den Durchschnitt ermitteln kann!

W 10.08 Welche gegenseitigen Lagen im Raum können zwei Ebenen einnehmen? Erläutere, wie man die gegenseitige Lage sowie den Durchschnitt ermitteln kann!

W 10.09 Was versteht man im Raum unter dem Winkelmaß zweier einander schneidender Geraden? Wie kann man dieses ermitteln?

W 10.10 Was versteht man im Raum unter dem Winkelmaß einer Geraden und einer Ebene? Wie kann man dieses ermitteln?

W 10.11 Welche Möglichkeiten für den Durchschnitt dreier Ebenen gibt es?

W 10.12 Wie kann man den Abstand eines Punktes von einer Ebene ermitteln?

W 10.13 Wie kann man den Abstand zweier paralleler Ebenen ermitteln?

W 10.14 Wie kann man den Abstand einer Ebene von Parallelgeraden ermitteln?

W 10.15 Wie kann man den Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum ermitteln?

W 10.16 Wie kann man den Abstand zweier paralleler Geraden im Raum ermitteln?

W 10.17 Wie kann man den Abstand zweier windschiefer Geraden ermitteln?

W 10.01 Ja, sie lautet $X = P + t \cdot \vec{g}$. Dabei ist $\vec{g} \in \mathbb{R}^3$ der Richtungsvektor der Geraden.

W 10.02 Nein.

W 10.03 Ja, sie lautet $X = P + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$. Dabei sind $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei nicht parallele Richtungsvektoren der Ebene.

W 10.04 Ja, sie lautet $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$. Dabei ist $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{n} \neq \vec{o})$ zu allen Richtungsvektoren der Ebene normal.

W 10.05 Jedem Paar $(u \mid v)$ reeller Zahlen entspricht genau ein Punkt der Ebene $E: X = P + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$.
Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau ein Paar $(u \mid v)$ reeller Zahlen.

W 10.06 Zwei Geraden g und h können einander schneiden, zueinander windschief sein, parallel und verschieden sowie parallel und zusammenfallend (identisch) sein. Haben g und h parallele Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$, so sind g und h parallel; gilt für $P \in g$ und $Q \in h$, dass $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{g}$ bzw. $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{h}$, so sind g und h zusammenfallend, ist dies nicht so, dann sind g und h parallel und verschieden. Sind die Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ nicht parallel und haben g und h keinen Punkt gemeinsam, so sind g und h windschief; bei einem gemeinsamen Punkt schneiden g und h einander genau in diesem einen Schnittpunkt.

W 10.07 Eine Ebene E und eine Gerade g können einander in einem Punkt schneiden, g kann zu E parallel sein und nicht in E liegen, g kann aber auch zu E parallel sein und in E liegen.
Ist $\vec{n}$ ein Normalvektor von E und $\vec{g}$ ein Richtungsvektor von g: Ist $\vec{g}$ nicht normal zu $\vec{n}$, so schneiden g und E einander in einem Punkt. Ist $\vec{g}$ normal zu $\vec{n}$, so ist g parallel zu E; ist $P \in E$, so liegt die Gerade g in E. Ist $P \notin E$, so liegt die Gerade g nicht in E.

W 10.08 Zwei Ebenen E_1 und E_2 können einander in einer Geraden g schneiden, parallel und verschieden sowie parallel und zusammenfallend (identisch) sein.
Sei $\vec{n}_1$ ein Normalvektor von E_1 und $\vec{n}_2$ ein Normalvektor von E_2: Ist $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, so schneiden E_1 und E_2 einander in einer Geraden.
Ist $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, so sind E_1 und E_2 zueinander parallel; ist $P \in E_1$ und $P \in E_2$, so fallen E_1 und E_2 zusammen, ist $P \notin E_2$, so sind E_1 und E_2 verschieden.

W 10.09 Das Winkelmaß zweier Geraden im Raum ist analog zum Winkelmaß zweier Geraden in der Ebene definiert.
Seien g und h zwei einander schneidende Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ sowie $\sphericalangle(\vec{g}, \vec{h}) = \alpha$.
Unter dem Winkelmaß φ der Geraden g und h versteht man: $\varphi = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } 0° \leqslant \alpha \leqslant 90° \\ 180° - \alpha, & \text{falls } 90° < \alpha \leqslant 180° \end{cases}$

W 10.10 Sei g eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{g}$ und E eine Ebene mit dem Normalvektor $\vec{n}$ sowie $\sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = \alpha$.
Unter dem Winkelmaß φ der Geraden g und der Ebene E versteht man: $\varphi = \begin{cases} 90° - \alpha, & \text{falls } 0° \leqslant \alpha \leqslant 90° \\ \alpha - 90°, & \text{falls } 90° < \alpha \leqslant 180° \end{cases}$

W 10.11 Der Durchschnitt dreier Ebenen E_1, E_2 und E_3 ist entweder leer, ein Punkt in $\mathbb{R}^3$, eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ oder eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

W 10.12 Sei $P \in \mathbb{R}^3$, E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit dem Normalvektor $\vec{n}$ und A ein beliebiger Punkt von E.
Dann gilt für den Abstand d des Punktes P von der Ebene E: $d = |\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{AP}|$ mit $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$.

W 10.13 Den Abstand d zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 kann man so ermitteln: Man wählt einen beliebigen Punkt P von E_1 und berechnet den Abstand dieses Punktes von der Ebene E_2.

W 10.14 Den Abstand d einer Ebene E von einer zu E parallelen Geraden g kann man so ermitteln: Da alle Punkte auf g den gleichen Abstand von E haben, wählt man einen beliebigen Punkt P auf g und berechnet den Abstand dieses Punktes von E.

W 10.15 Der Abstand d eines Punktes P von einer Geraden g im Raum kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden:
1. Möglichkeit: Man legt eine zu g normale Ebene E durch P und berechnet den Schnittpunkt S von E und g. Dann ist $d = \overline{PS}$.
2. Möglichkeit: Man wählt einen beliebigen Punkt $A \in g$, berechnet den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AP}$ und den Betrag $|\vec{a}_g|$ der Normalprojektion von $\vec{a}$ auf einen Richtungsvektor $\vec{g}$ von g. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz gilt dann: $d = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_g|^2}$.
3. Möglichkeit: Man wählt einen beliebigen Punkt $A \in g$. Der gesuchte Abstand d ist gleichzeitig Höhe des von $\vec{a} = \overrightarrow{AP}$ und dem Richtungsvektor $\vec{g}$ der Geraden aufgespannten Parallelogramms. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist sowohl durch $|\vec{g}| \cdot d$ als auch durch $|\vec{a} \times \vec{g}|$ gegeben. Aus $|\vec{g}| \cdot d = |\vec{a} \times \vec{g}|$ folgt: $d = \frac{|\vec{a} \times \vec{g}|}{|\vec{g}|}$.

W 10.16 Man wählt einen Punkt P auf einer der beiden Geraden und berechnet den Abstand d dieses Punktes von der anderen Geraden.

W 10.17 Den Abstand zweier windschiefer Geraden g und h kann man so ermitteln: Man stellt eine Gleichung einer zu h parallelen Ebene E auf, die g enthält. Die Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ von g und h sind auch Richtungsvektoren von E und somit ist $\vec{g} \times \vec{h}$ ein Normalvektor von E. Dann wählt man einen beliebigen Punkt P auf h und berechnet den Abstand dieses Punktes von E.