Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

C, D **1** Untersuche und begründe, welche der Zufallsvariablen X binomialverteilt ist.

a. Bei einer Multiple Choice-Prüfung gibt es 25 Fragen. Bei jeder Frage gibt es fünf Antwortmöglichkeiten, wobei entweder eine, zwei oder drei Antworten korrekt sind. Ein Kandidat kommt unvorbereitet zur Prüfung und rät die Antworten. X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

b. Eine Herstellerfirma von Golfbällen weiß, dass etwa 3% aller ihrer produzierten Golfbälle zu schwer und daher nicht regelkonform sind. Eine Packung von 20 Golfbällen wird stichprobenartig überprüft. X gibt die Anzahl der Golfbälle mit regelkonformer Masse an.

c. In einer Schulklasse mit 24 Schülerinnen und Schülern haben sechs Personen keine Englisch-Hausübung gemacht. Der Englisch-Lehrer wählt nach dem Zufallsprinzip drei Schülerinnen und Schüler aus, die ihre Hausübung vorlesen sollen. X gibt die Anzahl der Schülerinnen und Schüler in dieser Auswahl an, die keine Hausübung gemacht haben.

d. Zur Überprüfung der Einstellungen einer Golfball-Produktionsmaschine wird in einer Produktionsserie die Masse der Golfbälle erhoben. X gibt die Masse eines Golfballs an.

e. Etwa 1,8% aller Personen, die in Wien öffentliche Verkehrsmittel benutzen, fahren ohne gültigen Fahrschein. In einem U-Bahn-Waggon werden 20 Personen überprüft. X gibt die Anzahl der darunter befindlichen Personen mit gültigem Fahrschein an.

A, B, D **2** Ein Obstbauer weiß, dass etwa 3,5% aller Äpfel seiner Ernte wurmstichig sind. Er möchte berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich in einer Kiste Äpfel höchsten 3 wurmstichige befinden.

a. Argumentiere, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung (binomial bzw. normal) hier vorliegt.

b. Erkläre, welche Daten der Obstbauer noch kennen muss, um seine Berechnung durchführen zu können.

c. Berechne, wie viele wurmstichige Äpfel man in einer Kiste mit 200 Äpfeln erwarten kann und gib auch die zugehörige Standardabweichung an.

B, C **3** Im österreichischen Diabetesbericht von 2013 (www.gesundheit.gv.at) wurde geschätzt, dass etwa 8% der österreichischen Bevölkerung von einer Diabeteserkrankung betroffen sind. In einer Arztpraxis werden im Zuge der Gesundenuntersuchung 200 Personen, die im Vorfeld nicht mit Diabetes diagnostiziert waren, unter anderem in Hinblick auf Diabetes untersucht.

Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass unter den untersuchten Personen mindestens 198 nicht an Diabetes erkrankt sind. Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt und gibt die Anzahl der nicht an Diabetes erkrankten Personen an.

a. Gib die für diese Berechnung erforderlichen Parameter der Binomialverteilung an.

b. Stelle eine Formel auf, mit der man die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen kann.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den untersuchten Personen höchstens acht an Diabetes erkrankt sind.

d. Interpretiere, was durch $\left(1-0{,}92^{200}\right)$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

A, B **4** Die Masse eines regelkonformen Golfballs darf höchstens 45,93 g betragen. Eine Herstellerfirma von Golfbällen weiß, dass etwa 3% aller ihrer produzierten Golfbälle zu schwer und daher nicht regelkonform sind. Eine Packung von 20 Golfbällen wird stichprobenartig überprüft.

a. Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für die in der Packung vorhandenen regelkonformen Golfbälle.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei der getesteten Golfbälle nicht regelkonform sind.

Zur Überprüfung der Einstellungen einer Golfball-Produktionsmaschine wird in einer Produktionsserie die Masse der Golfbälle erhoben. Die Masse der an dieser Maschine produzierten Golfbälle wird als normalverteilt angenommen mit Erwartungswert $\mu = 44{,}50\,\text{g}$ und Standardabweichung $\sigma = 0{,}80\,\text{g}$.

c. Berechne, mit wie viel Prozent Ausschuss man bei dieser Maschine etwa rechnen muss. Ein Golfball gilt als Ausschussware, wenn seine Masse über der regelkonformen Toleranzgrenze liegt.

Autorin: Bettina Ponleitner

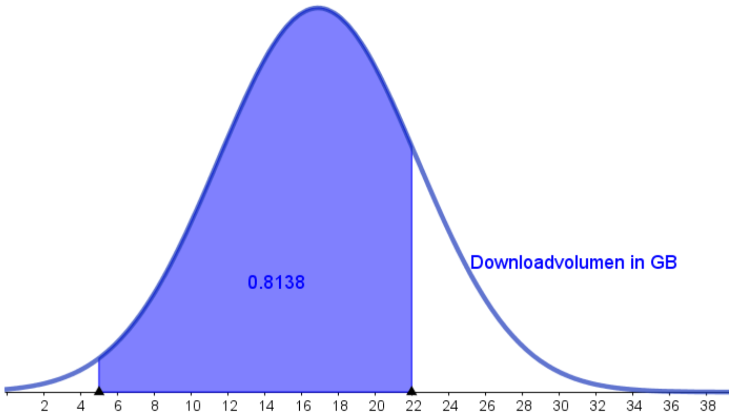
Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

d. Ermittle ein um den Erwartungswert symmetrisch liegendes Intervall, in dem 90% der Massen der produzierten Golfbälle liegen.

B, C **5** Die monatlichen Downloadmengen der Kunden eines Internetanbieters sind annähernd normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 16{,}9\,\text{GB}$ und Standardabweichung $\sigma = 5{,}4\,\text{GB}$.

a. Berechne, wie viel Prozent der Kundinnen und Kunden mehr als 25 GB Downloadvolumen pro Monat benötigen.

b. Interpretiere die in der Abbildung farbig gekennzeichnete Fläche im Sachzusammenhang.



c. Der Internetanbieter will überprüfen, ob das Downloadverhalten regionale Unterschiede aufweist. In einer bestimmten Region weiß man, dass etwa 88% der Kundinnen und Kunden ein monatliches Downloadvolumen zwischen 9,9 GB und 23,9 GB verbrauchen.

Ermittle die Standardabweichung des monatlichen Downloadvolumens eines Kunden bzw. einer Kundin des Internetanbieters in dieser Region. Nimm dabei an, dass der Erwartungswert wieder 16,9 GB beträgt.

A, B **6** Die Masse eines regelkonformen Golfballs darf höchstens 45,93 g betragen. Zur Überprüfung der Einstellungen einer Golfball-Produktionsmaschine wird in einer Produktionsserie die Masse der Golfbälle erhoben. Die Masse der an dieser Maschine produzierten Golfbälle wird als normalverteilt angenommen mit Standardabweichung $\sigma = 0{,}80\,\text{g}$. Derzeit produziert die Maschine etwa 8% Ausschussware, d.h. Golfbälle deren Masse nicht regelkonform ist.

a. Berechne den erforderlichen Erwartungswert, damit die Maschine bei gleichbleibender Standardabweichung nur noch 5% Ausschussware produziert.

b. Auf einer zweiten Maschine beträgt der Erwartungswert für die Golfballmasse 44,50 g. Berechne die Standardabweichung so, dass 97% aller produzierten Golfbälle eine Masse von höchstens 45,90 g haben.

c. Auf einer dritten Maschine ergeben die Kontrollen, dass 20% der Golfbälle eine geringere Masse als 43,20g haben und 30 % der Golfbälle eine größere Masse als 44,60 g haben. Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung für die Masse eines Golfballs auf dieser Maschine.

A, B, C **7** Etwa 1,8% aller Personen, die in Wien öffentliche Verkehrsmittel benutzen, fahren ohne gültigen Fahrschein. Bei einer Fahrkartenkontrolle in der Station *Wien Mitte – Landstraße* werden 245 Personen überprüft.

a. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei dieser Überprüfung mehr als sechs Personen ohne Fahrschein angetroffen werden.

b. Berechne, wie viele Personen man mindestens überprüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestens eine Person ohne Fahrschein anzutreffen.

c. Interpretiere, was mit dem Term $\binom{50}{47} \cdot 0{,}982^{47} \cdot 0{,}018^{3}$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

A, B, D

8 Auf einem Feuerwehrfest gibt es ein Glücksrad. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einmaligem Drehen des Glücksrades gewinnt, beträgt 12%.

a. An einem Abend wird das Glücksrad etwa 360-mal gedreht. Berechne, wie viele Gewinne durchschnittlich an so einem Abend vergeben werden.

b. Am letzten Abend des Feuerwehrfestes sind nur noch 7 Gewinne übrig. Der Betreiber des Glücksrads überlegt, wie viele Menschen wohl noch am Glücksradspiel teilnehmen können, bis alle Gewinne vergeben sind. Er behauptet: „50 Personen kann ich auf jeden Fall noch das Glücksrad drehen lassen. Es ist total unwahrscheinlich, dass dabei mehr als sieben Personen gewinnen." Argumentiere, ob der Betreiber des Glücksrads mit seiner Aussage recht hat.

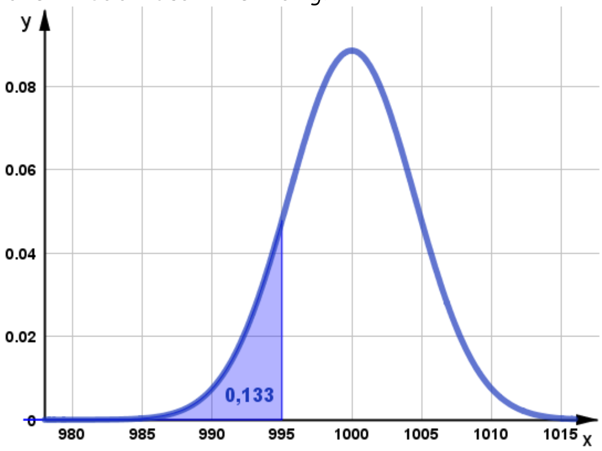
c. Der Bürgermeister des Ortes bezahlt seinen Enkelkindern insgesamt 10 Runden am Glücksrad. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kinder mindestens einen Gewinn mit nach Hause nehmen.

d. Berechne, wie oft man am Glücksrad drehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens einen Gewinn zu erhalten.

A, B, D

9 In einer Imkerei werden verschiedene Sorten Honig maschinell abgefüllt. Die Sollmenge in einem Glas Blütenhonig beträgt 1 kg. Die tatsächliche Füllmenge ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 1000 g und einer Standardabweichung von 4,5g.

a. In der Abbildung ist die Dichtefunktion der Füllmenge dargestellt. Interpretiere die in der Abbildung farbig gekennzeichnete Fläche im Sachzusammenhang.



b. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Glas Blütenhonig mindestens 997 g Honig enthält.

Um die Einstellung der Abfüllmaschine zu überprüfen, werden regelmäßig Kontrollen durchgeführt. Die letzte Überprüfung hat ergeben, dass etwa 56% der getesteten Gläser höchstens 1000 g Honig und rund 11,5% der getesteten Gläser mehr als 1005 g Honig enthielten.

c. Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung der kontrollierten Gläser. Runde die Ergebnisse dabei auf eine Nachkommastelle.

d. Wenn der Anteil der Honiggläser mit einer Füllmenge von weniger als 994 g größer als 10% ist, muss die Maschine neu eingestellt werden. Verwende deine Ergebnisse aus Aufgabe **c.** und argumentiere, ob die Maschine neu eingestellt werden muss.

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu: Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

1 **a.** nicht binomialverteilt, da die Wahrscheinlichkeiten für die richtige Beantwortung der Fragen unterschiedlich sind.

b. binomialverteilt, weil es zwei Versuchsausgänge für jeden Ball gibt (Ball ist regelkonform bzw. nicht regelkonform), die Wahrscheinlichkeit für einen regelkonformen Ball konstant 97% beträgt und die X die Anzahl der regelkonformen Golfbälle angibt.

c. nicht binomialverteilt, da sich die Anzahl der Schüler und Schülerinnen nach jeder Auswahl ändert und dadurch auch die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Hausübung gemacht bzw. nicht gemacht hat, verändert wird.

d. nicht binomialverteilt, da X die Masse eines Golfballs angibt und damit eine kontinuierliche Zufallsvariable ist.

e. binomialverteilt, da es zwei Versuchsausgänge für jede überprüfte Person gibt (hat einen gültigen Fahrschein bzw. hat keinen gültigen Fahrschein), die Wahrscheinlichkeit für eine Person mit gültigem Fahrschein konstant 98,2% beträgt und X die Anzahl der positiven Versuchsausgänge (Person hat einen gültigen Fahrschein) angibt.

2 **a.** Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der wurmstichigen Äpfel an. X ist nicht normalverteilt, da es sich um eine diskrete Zufallsvariable handelt. X ist binomialverteilt, da es für jeden Apfel zwei Versuchsausgänge gibt (wurmstichig bzw. nicht wurmstichig) und die Wahrscheinlichkeit für einen wurmstichigen Apfel als konstant mit 3,5% angenommen wird.

b. Der Obstbauer muss noch die Anzahl n der Äpfel in einer Kiste kennen, da man für das Modell der Binomialverteilung die Anzahl der Wiederholungen n des Zufallsexperiments und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des betrachteten Ereignisses kennen muss. Das Ereignis ist in diesem Fall „Apfel ist wurmstichig" und die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $p = 0{,}035$.

c. Erwartungswert: $\mu = 200 \cdot 0{,}035 = 7$ wurmstichige Äpfel; Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}035 \cdot 0{,}965} = 2{,}599\ldots$

3 **a.** Anzahl der Wiederholungen des Zufallsexperiments: $n = 200$;
Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses „Person ist nicht an Diabetes erkrankt": $p = 0{,}92$.

b. $P(X \geq 198) = \binom{200}{198} \cdot 0{,}92^{198} \cdot 0{,}08^{2} + 199 \cdot 0{,}92^{199} \cdot 0{,}08 + 0{,}92^{200}$

c. X gibt die Anzahl der an Diabetes erkrankten Personen an. X ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}08$.
$P(X \leq 8) = 0{,}0183$

d. Der Term $\left(1 - 0{,}92^{200}\right)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens eine Person an Diabetes erkrankt ist (bzw. dass höchstens 199 Personen nicht an Diabetes erkrankt sind).

4 **a.** $\mu = 0{,}03 \cdot 20 = 0{,}6$; $\sigma = \sqrt{0{,}03 \cdot 0{,}97 \cdot 20} \approx 0{,}582$

b. X gibt die Anzahl der nicht regelkonformen Golfbälle an. X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}03$.
$P(X \leq 2) = 0{,}979$

c. $P(45{,}93 \leq X) = 0{,}0369$, d.h. man muss mit etwa 3,7% Ausschuss rechnen. [X gibt die Masse eines Golfballs an.]

d. [43,18 g; 45,82 g]

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

5 **a.** $P(X \geq 25) = 0{,}0668$, d.h. etwa 6,7% aller Kundinnen und Kunden benötigen mehr als 25 GB Downloadvolumen.

b. Ein zufällig ausgewählter Kunde bzw. eine zufällig ausgewählte Kundin des Internetanbieters hat mit etwa 81,4%iger Wahrscheinlichkeit ein Downloadvolumen zwischen 5 und 22 GB pro Monat.
oder:
Etwa 81,4% der Kundinnen und Kunden des Internetanbieters haben ein Downloadvolumen von 5 GB bis 22 GB pro Monat.

c. $\sigma \approx 4{,}5\,\text{GB}$
[Das angegebene Intervall liegt symmetrisch um den Erwartungswert. Daher gilt
$\Phi\left(\frac{9{,}9-16{,}9}{\sigma}\right) = 0{,}06 \Rightarrow \frac{9{,}9-16{,}9}{\sigma} = -1{,}5548$]

6 **a.** $\mu \approx 44{,}61\,\text{g}$;

[Da der Ausschussanteil 5% betragen soll, gilt $\Phi\left(\frac{45{,}93-\mu}{0{,}8}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{45{,}93-\mu}{0{,}8} = 1{,}6449$.]

b. $\sigma \approx 0{,}74\,\text{g}$;

[Es gilt $\Phi\left(\frac{45{,}90-44{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}97 \Rightarrow \frac{45{,}90-44{,}5}{\sigma} = 1{,}8808$.]

c. $\mu \approx 44{,}06\,\text{g}$ $\sigma \approx 1{,}02\,\text{g}$;
[Da sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung gesucht sind, benötigt man zwei Gleichungen. Aus $\Phi\left(\frac{43{,}20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}2$ erhält man $\frac{43{,}20-\mu}{\sigma} = -0{,}8416$, aus $\Phi\left(\frac{44{,}60-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7$ erhält man $\frac{44{,}60-\mu}{\sigma} = 0{,}5244$. Lösen des Gleichungssystems ergibt Erwartungswert und Standardabweichung.]

7 **a.** X gibt die Anzahl der Personen ohne gültigen Fahrschein an. X ist binomialverteilt mit $n = 245$ und $p = 0{,}018$.
$P(X > 6) = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 0{,}1558$

b. Man muss mindestens $n = 254$ Personen kontrollieren.
[$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}982^n$; Lösen der Gleichung $1 - 0{,}982^n = 0{,}99$ nach der Anzahl n der zu überprüfenden Personen liefert das Ergebnis.]

c. Mit dem Term wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von 50 Personen genau 47 einen gültigen Fahrschein besitzen.

8 **a.** Erwartungswert $\mu = 43{,}2$, d.h. es werden durchschnittlich 43 Gewinne vergeben.

b. Der Betreiber des Glücksrades hat unrecht: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Wiederholungen mehr als 7 (d.h. mindestens 8) Gewinne erzielt werden, beträgt $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0{,}2467$. Dabei ist X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}12$, die die Anzahl der Gewinne beschreibt. Das Ereignis, dass mehr als 7 Gewinne erzielt werden, ist demnach sicherlich nicht als „total unwahrscheinlich" zu bezeichnen.

c. X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}12$, die die Anzahl der Gewinne beschreibt.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}88^{10} = 0{,}7215$. Die Enkelkinder des Bürgermeisters nehmen also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 72% mindestens einen Gewinn mit nach Hause.

d. Man muss das Glücksrad mindestens 24 Mal drehen.

[X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und $p = 0{,}12$.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}88^n$. Lösen der Gleichung $1 - 0{,}88^n = 0{,}95$ liefert das gewünschte Ergebnis.]

Lösungen zu:
Ich kann die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren.

9 **a.** Die farbig gekennzeichnete Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewähltes Honigglas weniger als 995g Honig beinhaltet. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 13%.
oder: Etwa 13% aller Honiggläser haben eine Füllmenge von höchstens 995 g.

b. $P(X \geq 997) = 0{,}7475$

c. $\mu \approx 999{,}3\,\text{g}$ $\sigma \approx 4{,}8\,\text{g}$;
[Da sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung gesucht sind, benötigt man zwei Gleichungen. Aus $\Phi\left(\frac{1000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}56$ erhält man $\frac{1000-\mu}{\sigma} = 0{,}1510$, aus $\Phi\left(\frac{1005-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}885$ erhält man $\frac{1005-\mu}{\sigma} = 1{,}2004$. Lösen des Gleichungssystems ergibt Erwartungswert und Standardabweichung.]

Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung der kontrollierten Gläser.

d. Mit Erwartungswert und Standardabweichung aus Aufgabe **c.** erhält man $P(X \leq 994) = 0{,}1348$. Der Anteil der Honiggläser mit einer geringeren Füllmenge als 994 g ist somit größer als die tolerierten 10%. Daher muss die Maschine neu eingestellt werden.

Autorin: Bettina Ponleitner