Ich kann typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkehre, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break-Even-Point, Gewinnzone, Cournotscher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren.

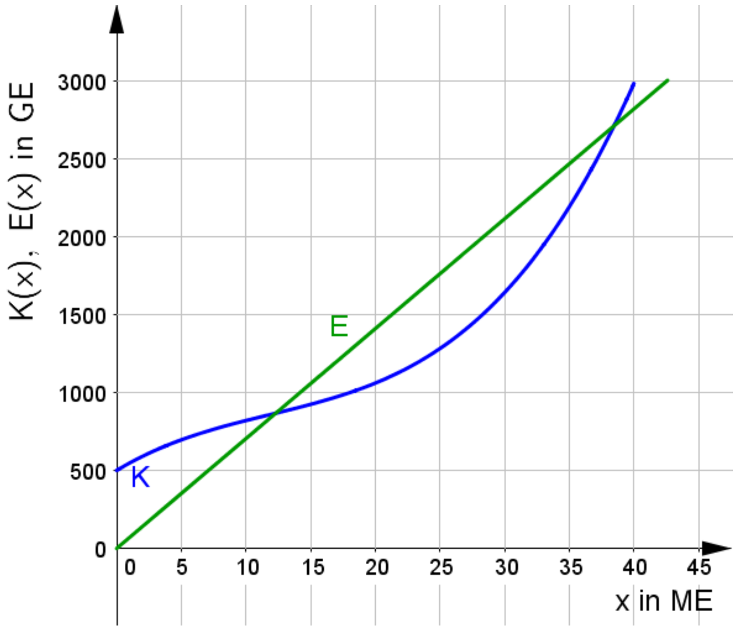
B **1** Im Diagramm sind die Kostenfunktion und die Erlösfunktion eines Betriebs dargestellt.

a. Ermittle die gewinnmaximale Menge, indem du jene Tangente an die Kostenfunktion einzeichnest, die parallel zur Erlösfunktion ist.

b. Skizziere die Gewinnfunktion und ermittle näherungsweise den maximalen Gewinn.
Die Gewinnfunktion G ist gegeben durch
$G(x) = -0{,}07x^3 + 2{,}5x^2 + 20{,}47x - 500$.

c. Berechne den Break-Even-Point und die Gewinngrenze. Gib auch den Gewinnbereich an. (Achte dabei darauf, sinnvoll zu runden.)

d. Berechne die gewinnmaximale Menge sowie den maximalen Gewinn.
Vergleiche die Ergebnisse deiner Berechnungen mit jenen, die du aus dem Diagramm abgelesen hast.



B, C **2** Ein Monopolbetrieb arbeitet mit der Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}07x^3 - 3x^2 + 45x + 1000$ und der Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = -3{,}94x + 251{,}47$.

a. Bestimme die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion.

b. Berechne den Deckungsbeitrag bei einer Produktion von 30 ME.

c. Berechne, bei welcher Menge die durchschnittlichen Kosten minimal sind.

d. Interpretiere das Ergebnis aus Aufgabe **c.** sowie den zugehörigen Funktionswert $\overline{K}(x)$ im Sachzusammenhang.

B, C **3** Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $\overline{K}(x) = 0{,}07x^2 - 2{,}8x + 50 + \frac{750}{x}$, der Erlös wird durch die Erlösfunktion E mit $E(x) = -3{,}8x^2 + 250x$ beschrieben.

a. Ermittle die Gesamtkostenfunktion.

b. Berechne die Schnittstellen der Graphen von Erlösfunktion und Kostenfunktion.

c. Interpretiere das Ergebnis aus Aufgabe **b.** im Sachzusammenhang.

d. Berechne den Cournotschen Punkt und interpretiere seine Koordinaten im Sachzusammenhang.

B, C **4** Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}068x^3 - 2{,}5x^2 + 40x + 1000$.

a. Ermittle jene Menge x_M, bei der die variablen Stückkosten minimal sind.

b. Interpretiere den Wert $\overline{K}_V(x_M)$ im Sachzusammenhang.

c. Berechne die Kostenkehre.

A, B, C **5** Der Betrieb CoffeeHouse will selbstgebackene Riesen-Erdnusskekse ins Sortiment aufnehmen. Eine Markanalyse während der Testphase hat ergeben, dass pro Monat etwa 1000 Personen bereit wären, ein Keks zum Preis von 1,80€ zu kaufen. Wäre der Preis 2,60€/Stück, so würden nur noch 800 Personen ein Keks kaufen.

a. Ermittle die lineare Nachfragefunktion p_N.

b. Ermittle die Erlösfunktion E.

c. Berechne den Verkaufspreis, für den das CoffeeHouse den maximalen Erlös erzielt, und gib den maximalen Erlös an.

d. Berechne den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

A, B, C **6** Eine Fitnesstrainerin bietet individuell gestaltete Einzel-Trainings zu einem Preis von 85€/Stunde an. Die monatlichen Ausgaben des Betriebs lassen durch die Kostenfunktion K mit

$K(x) = 0{,}05x^3 - 2{,}5x^2 + 50x + 370$ beschreiben, wobei x die Anzahl der abgehaltenen Trainingseinheiten angibt.

a. Ermittle die Erlösfunktion E.

b. Ermittle die Gewinnfunktion G.

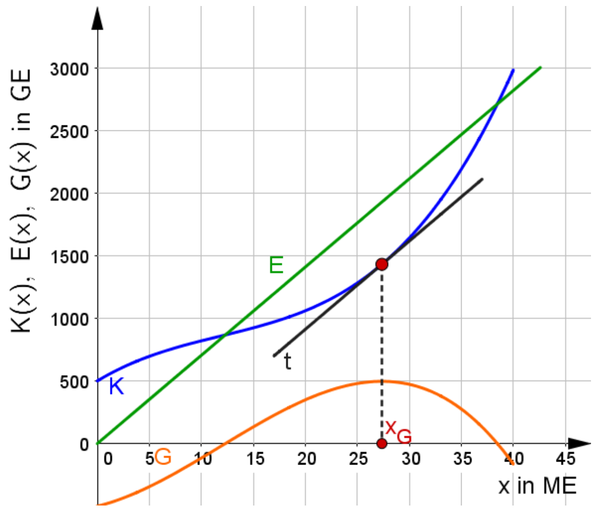
c. Berechne, wie viele Trainingseinheiten die Trainerin pro Monat mindestens halten muss, damit sie keinen Verlust macht. Achte darauf, dass du sinnvoll rundest.

d. Kann der monatliche Gewinn 2000€ betragen? Begründe deine Antwort.

Lösungen zu:
Ich kann typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkehre, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break-Even-Point, Gewinnzone, Cournotscher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren.

1 **a.** gewinnmaximale Menge $x_G \approx 27\,\text{ME}$. [Erklärung:

An der gewinnmaximalen Menge x_G gilt $E'(x_G) = K'(x_G)$, da $G'(x_G)$. Das heißt, dass die Tangente an die Kostenfunktion in an dieser Stelle dieselbe Steigung hat wie die Erlösfunktion.]



b. siehe Diagramm; An den Schnittstellen von Erlös- und Kostenfunktion hat die Gewinnfunktion Nullstellen, an der gewinnmaximalen Menge einen Hochpunkt. Der maximale Gewinn ist die Differenz zwischen Erlös und Kosten an der gewinnmaximalen Menge und beträgt etwa 500 GE.

c. Break-Even-Point: 12,3… ME;
Gewinngrenze: 38,4… ME [Löse $G(x) = 0$.]

Gewinnbereich: 13 ME bis 38 ME [Würde man den Break-Even-Point abrunden, wäre man außerhalb des Gewinnbereichs (bei 12 ME macht der Betrieb noch Verlust). Daher muss man den Break-Even-Point aufrunden.]

d. gewinnmaximale Menge: $x_G \approx 27{,}4\,\text{ME}$. [Löse $G'(x) = 0$.]

maximaler Gewinn: $G(x_G) \approx 497{,}82\,\text{GE}$.

2 **a.** Erlösfunktion: $E(x) = -3{,}94x^2 + 251{,}47x$; Gewinnfunktion: $G(x) = -0{,}07x^3 - 0{,}94x^2 + 206{,}47x - 1000$

b. Deckungsbeitrag: $D(30) = 3458{,}10$ GE ; [Deckungsbeitrag = Erlös – variable Kosten]

c. Bei etwa 29,6 ME sind die Durchschnittskosten minimal.

d. Die Minimalstelle $x_{BO} = 29{,}6$ ME der Durchschnittskosten gibt das Betriebsoptimum an.

$\bar{K}(x_{BO}) = 51{,}3$ GE / ME sind die kleinstmöglichen Durchschnittskosten. Diese stellen die langfristige Preisuntergrenze dar. Wenn der Verkaufspreis pro ME 51,3 GE beträgt, sind im Betriebsoptimum gerade noch die Produktionskosten gedeckt. Der Betrieb ist in diesem Fall ein Grenzbetrieb.

3 **a.** Gesamtkostenfunktion: $K(x) = 0{,}07x^3 - 2{,}8x^2 + 50x + 750$

b. Schnittstellen: $x_1 = 3{,}84...$ ME , $x_2 = 44{,}50...$ ME

c. An den beiden Schnittstellen sind Erlös und Kosten gleich hoch, daher ist der Gewinn hier 0. Zwischen den beiden Schnittstellen von Erlös- und Kostenfunktion liegt der Gewinnbereich, das heißt dieser liegt etwa zwischen 4 und 44 ME. Die kleinere Nullstelle wird als Break-Even-Point, die größere als Gewinngrenze bezeichnet.

d. Cournotschen Punkt: $(26{,}5\,\text{ME} \mid 149{,}5\,\text{GE/ME})$. Die x-Koordinate des Cournotschen Punktes gibt die gewinnmaximale Menge an, die y-Koordinate gibt den zugehörigen Verkaufspreis an.
[Löse $G'(x) = 0 \Rightarrow x \approx 26{,}5$. Berechne $p(26{,}5) \approx 149{,}5$, wobei $p(x) = -3{,}8x + 250$.]

4 **a.** $x_M = 18{,}4$ ME (= Betriebsminimum) [Löse $\bar{K}_V'(x_M) = 0$.]

b. Der Wert $\bar{K}_V(x_M)$ gibt die kurzfristige Preisuntergrenze an. Wenn der Verkaufspreis gleich $\bar{K}_V(x_M)$ ist, sind gerade noch die variablen Kosten gedeckt. Der Betrieb wird dann Minimalbetrieb genannt.

c. Kostenkehre bei $x = 12{,}3$ ME [Löse $K''(x) = 0$.]

Lösungen zu:
Ich kann typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkehre, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break-Even-Point, Gewinnzone, Cournotscher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren.

5 **a.** $p_N(x) = -0{,}008x + 5$ [Aus I) $p_N(400) = 1{,}80$ und II) $p_N(300) = 2{,}60$ erhält man das lineare Gleichungssystem I) $1{,}80 = 400a + b$ und II) $2{,}60 = 300a + b$. Lösen dieses Gleichungssystem liefert $a = -0{,}008$, $b = 5$.

b. $E(x) = p_N(x) \cdot x = -0{,}008x^2 + 5x$

c. Der Verkaufspreis, bei dem das CoffeeHouse den maximalen Erlös erzielt, ist 2,50€/Keks. [Löse E'(x)=0 um die gewinnmaximale Menge zu erhalten: $x = 312{,}5$ ME. Da keine halben Kekse verkauft werden können, muss man entweder auf- oder abrunden. Beide Varianten liefern denselben Daher können wir aufrunden und erhalten eine erlösmaximale Menge von 313 Keksen und einen Stückpreis von 2,50€.]

Der maximale Erlös beträgt $E(313) = 781{,}25$ €.

d. Höchstpreis: $p_N(0) = 5$ €; Sättigungsmenge: $x = 625$ Stück [Löse $p_N(x) = 0$.]

6 **a.** Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x = 85x$

b. Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}05x^3 + 2{,}5x^2 + 35x + 370$

c. Die Trainerin muss mindestens 8 Trainingsstunden pro Monat halten, damit sie keinen Verlust macht. [Lösen von $G(x) = 0$ ergibt $x = 7{,}31$ Stunden. Hier muss man aufrunden, da die Trainerin bei 7 gehaltenen Stunden noch Verlust machen würde.]

d. Nein, der monatliche Gewinn kann bei diesem Modell nie 2000€ betragen, da der maximale Gewinn bei etwa 1832€ pro Monat liegt. [Berechne die gewinnmaximale Menge durch lösen von G'(x)=0. Einsetzen in die Gewinnfunktion ergibt den maximalen Gewinn.]

Autorin: Bettina Ponleitner