LÖSUNG ZU 698

Hauptbedingung:

V(r,h) = $\frac{1}{3}r^2\pi h$

Nebenbedingung: Satz des Pythagoras

$h^2 + r^2 = s^2$

$r^2 = s^2 - h^2$

Zielfunktion:

V(h) = $\frac{1}{3}(s^2 - h^2)\pi h = \frac{1}{3}\pi(s^2 h - h^3)$

V'(h) = $\frac{1}{3}\pi(s^2 - 3h^2)$
V''(h) = $-\frac{1}{3}\pi 6h = -2\pi h$

V'(h) = 0 $\quad\Rightarrow\quad s^2 - 3h^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad h_{1,2} = \pm\frac{s}{\sqrt{3}}$ d.h. $h = \frac{s}{\sqrt{3}}$ V''($\frac{s}{\sqrt{3}}$) < 0, d.h. Maximum

$r = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{3}} = \sqrt{\frac{2s^2}{3}} = s\sqrt{\frac{2}{3}}$

Berechnung des Öffnungswinkels:

$\tan(\varphi) = \frac{r}{h} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2} \quad\rightarrow\quad \varphi \approx 54{,}7° \quad\rightarrow\quad 2\varphi \approx 109{,}5°$

Mit einem Öffnungswinkel von rund 109,5° wird das Volumen des Glases maximal.