Ich kann den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung beschreiben.

D **1** Herr Bauer zahlt sechs Jahre lang jeweils am Ende des Jahres 700€ auf ein mit 1,5% verzinstes Sparbuch ein. Argumentiere, warum man den angesparten Endwert nach sechs Jahren mithilfe der Summenformel der geometrischen Reihe berechnen kann.

C, D **2** Jonathan beschließt, jeden Monat 20€ seines Taschengeldes auf ein mit 0,5% p.m. verzinstes Sparbuch einzuzahlen. Nun will er wissen, welchen Betrag er nach zwölf Monaten angespart hat. Er überlegt, dass er den Endwert nach 12 Monaten so ausrechnen kann:

$$E_{12} = 20 \cdot 1{,}005^{11} + 20 \cdot 1{,}005^{10} + \ldots + 20 \cdot 1{,}005 + 20 \,.$$

In einem Mathematikbuch findet er die geometrische Summenformel $E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ zur Berechnung des Endwerts bei nachschüssigen Renten. Jonathan versteht aber nicht, wie – und vor allem, warum – er diese Formel für seine Berechnung einsetzen kann.

a. Gib an, welche Werte Jonathan für n, R und q in die Summenformel einsetzen muss.

b. Zeige durch Umformen, wie man Jonathans Formel zur Berechnung von E_{12} auf die Summenformel bringen kann. Dokumentiere dabei alle Umformungsschritte.

C **3** Einige Jahre lang werden jeweils am Ende des Jahres 1000€ auf ein mit 5% p.a. verzinstes Sparbuch eingezahlt. Ergänze jede Aussage so, dass sie richtig ist.

Der Endwert nach 20 Jahren ist …	
Der Endwert nach 19 Jahren ist …	

A	$E = 1000 \cdot 1{,}05^{19} + 1000 \cdot 1{,}05^{18} + \ldots + 1000 \cdot 1{,}05 + 1000$
B	$E = 1000 \cdot 1{,}05^{20} + 1000 \cdot 1{,}05^{19} + \ldots + 1000 \cdot 1{,}05 + 1000$
C	$E = 1000 \cdot \frac{1{,}05^{19} - 1}{1{,}05 - 1}$
D	$E = 1000 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1 - 1{,}05}$

C **4** Fünf Jahre lang wird jeweils am Ende eines Jahres eine gleichbleibende Rate R auf ein mit 2% p.a. verzinstes Sparbuch eingezahlt. Der Endwert E_5 nach 5 Jahren kann mithilfe der geometrischen Summenformel berechnet werden. Entscheide und kreuze an, welche Antwort richtig ist.

A $E_5 = R \cdot \left(1{,}02^4 + 1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1\right) = R \cdot \frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1}$.

B $E_5 = R \cdot \left(1{,}02^5 + 1{,}02^4 + 1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1\right) = R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1}$

C $E_5 = R \cdot \left(1{,}02^4 + 1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1\right) = R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1}$

D $E_5 = R \cdot \left(1{,}02^5 + 1{,}02^4 + 1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1\right) = R \cdot \frac{1{,}02^6 - 1}{1{,}02 - 1}$

E $E_5 = R \cdot \left(1{,}02^4 + 1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02\right) = R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1}$

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung beschreiben.

1 Die erste Rate wird fünf Jahre lang verzinst, die zweite Rate vier Jahre lang, die dritte Rate drei Jahre lang usw. Insgesamt zahlt Herr Bauer sechs Raten ein. Man erhält die Endwerte der einzelnen Raten daher als

Rate	Verzinsungsdauer (in Jahren)	Endwert in Euro
1	5	$700 \cdot 1{,}015^5$
2	4	$700 \cdot 1{,}015^4$
3	3	$700 \cdot 1{,}015^3$
4	2	$700 \cdot 1{,}015^2$
5	1	$700 \cdot 1{,}015^1$
6	0	$700 \cdot 1{,}015^0 = 700$

Den nach 6 Jahren angesparten Gesamtbetrag erhält man, indem man die einzelnen Endwerte summiert, also

$$E_6 = 700 \cdot 1{,}015^5 + 700 \cdot 1{,}015^4 + 700 \cdot 1{,}015^3 + 700 \cdot 1{,}015^2 + 700 \cdot 1{,}015^1 + 700$$
$$= 700 \cdot \left(1{,}015^5 + 1{,}015^4 + 1{,}015^3 + 1{,}015^2 + 1{,}015^1 + 1\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist das 6. Glied geometrischen Reihe mit Quotient 1,015. Dieses können wir mit der geometrischen Summenformel

$$s_6 = \frac{1{,}015^6 - 1}{1{,}015 - 1}$$

berechnen. Daher kann man den nach 6 Jahren angesparten Betrag mithilfe der Summenformel

$$E_6 = 700 \cdot \frac{1{,}015^6 - 1}{1{,}015 - 1}$$

berechnen.

2 **a.** $n = 12$; $R = 20$; $q = 1{,}005$

b. Durch Herausheben erhalten wir

$$E_{12} = 20 \cdot \left(1{,}005^{11} + 1{,}005^{10} + \ldots + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right).$$

Wir bezeichnen den Ausdruck in der Klammer mit s_{12} und multiplizieren beide Seiten mit 1,005

$$s_{12} = 1{,}005^{11} + 1{,}005^{10} + \ldots + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1 \quad | \cdot 1{,}005$$
$$1{,}005 \cdot s_{12} = 1{,}005^{12} + 1{,}005^{11} + \ldots + 1{,}005^3 + 1{,}005^2 + 1{,}005.$$

Dann subtrahieren wir die 1. Zeile von der 2. Zeile und erhalten

$$1{,}005 \cdot s_{12} - s_{12} = 1{,}005^{12} + 1{,}005^{11} + \ldots + 1{,}005^2 + 1{,}005 - \left(1{,}005^{11} + 1{,}005^{10} + \ldots + 1{,}005^2 + 1{,}005 + 1\right).$$

Durch Auflösen der Klammer und Zusammenfassen auf der rechten bzw. Herausheben auf der linken Seite der Gleichung erhalten wir

$$s_{12} \cdot (1{,}005 - 1) = 1{,}005^{12} - 1,$$

und schließlich

$$s_{12} = \frac{1{,}005^{12} - 1}{1{,}005 - 1}.$$

Dieser Ausdruck ist das 12. Glied der geometrischen Reihe mit Quotient. Wenn wir diesen Ausdruck wieder in die ursprüngliche Formel für den Endwert E_{12} einsetzen, erhalten wir schließlich die gewünschte Summenformel

$$E_{12} = 20 \cdot \frac{1{,}005^{12} - 1}{1{,}005 - 1}.$$

3

Der Endwert nach 20 Jahren ist …	A
Der Endwert nach 19 Jahren ist …	C

4 $\boxed{C}$