LÖSUNG ZU 199:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

Nullstellen:

$x^3 - 3x^2 = 0 \qquad x^2 \cdot (x-3) = 0$ /Anwendung des Produkt-Null-Satzes

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_{1,2} = 0 \qquad x_3 = 3$

Extremstellen:

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6 \qquad 3x^2 - 6 = 0 \qquad 3x \cdot (x-2) = 0$ /Anwendung des Produkt-Null-Satzes

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

Ist eine Stelle eine doppelte Nullstelle von f, dann ist diese Stelle auch eine Extremstelle von f.

b) $f(x) = x^3 - 12x - 16$

konstantes Glied: 16

$T_{16} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

z.B.:

$x = 1$	$1 - 12 - 16 = 0$	$-27 = 0$	f.A.
$x = -1$	$-1 + 12 - 16 = 0$	$-5 = 0$	f.A.
$x = 2$	$8 - 24 - 16 = 0$	$-32 = 0$	f.A.
$x = -2$	$-8 + 24 - 16 = 0$	$0 = 0$	w.A.

Nullstellen:

$(x^3 - 12x - 16) : (x + 2) = x^2 - 2x - 8$

$\underline{-x^3 - 2x^2}$

$-2x^2 - 12x$

$\underline{+2x^2 + 4x}$

$-8x - 16$

$\underline{+8x + 16}$

$0 \qquad x^2 - 2x - 8 = 0$ /Anwendung der kleinen Lösungsformel

$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 4$

Extremstellen:

$f(x) = x^3 - 12x - 16$

$f'(x) = 3x^2 - 12 \qquad 3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$

Ist eine Stelle eine doppelte Nullstelle von f, dann ist diese Stelle auch eine Extremstelle von f.

c) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}$ $\qquad 0 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}$ $\quad / \cdot 12$

$0 = x^4 - 6x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 6)$ /Anwendung des Produkt-Null-Satzes

$\downarrow \quad \downarrow$

$x_{1,2} = 0 \quad x^2 - 6 = 0 \quad x^2 = 6 \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$

Extremstellen:

$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$0 = \frac{x^3}{3} - x \quad / \cdot 3$

$0 = x^3 - 3x$

$0 = x \cdot (x^2 - 3)$ / Anwendung des Produkt-Null-Satzes

$\downarrow \quad \downarrow$

$x_1 = 0 \quad x^2 - 3 = 0 \quad /+3$

$x^2 = 3$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

Ist eine Stelle eine doppelte Nullstelle von f, dann ist diese Stelle auch eine Extremstelle von f.

d) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81 \qquad x^2 = u$

Nullstellen:

$f(u) = u^2 - 18u + 81$

$u_{1,2} = 9 \pm\sqrt{81 - 81}$

$u_{1,2} = 9$

$x_{1,2} = 3 \qquad x_{3,4} = -3$

Extremstellen:

$f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$

$4x^3 - 36x = 0$ /herausheben

$4x \cdot (x^2 - 9) = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x_1 = 0 \quad x^2 - 9 = 0 \quad /+9$

$x^2 = 9$

$x_{2,3} = \pm 3$

Ist eine Stelle eine doppelte Nullstelle von f, dann ist diese Stelle auch eine Extremstelle von f.