

|   |                            |                        |
|---|----------------------------|------------------------|
| <b>Thema:</b> Stetige Verzinsung – Herleitung von e |                            | <b>Grundkompetenz:</b> |
| <b>Name:</b>  | <b>Schwierigkeitsgrad:</b> | <b>Klasse:</b>         |

$$e = 2,71828182\dots$$

Die **Eulersche Zahl e** kann über die sogenannte stetige Verzinsung hergeleitet werden.

Darunter versteht man Folgendes:

Es wird angenommen, dass eine Bank 100 Prozent Jahreszinsen gibt, wobei jährlich abgerechnet wird. Nach einem Jahr werden dann aus einem Euro zwei Euro.

Wird schon nach einem halben Jahr abgerechnet und werden die Zinsen gleich wieder angelegt, ergibt sich nach der Zinseszinsrechnung ein Kapital von  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$  Euro am Ende des Jahres.

Bei monatlicher Abrechnung und sofortiger Veranlagung der Zinsen wächst ein Euro nach Ablauf eines Jahres auf  $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$  Euro an.

Wird das Jahr nun in n gleich lange Zeitintervalle geteilt, wird aus einem Euro unter Berücksichtigung der Zinseszinsen ein Kapital von  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  Euro.

Mit dem CAS von Geogebra zum Beispiel lässt sich diese Kapitalentwicklung gut beobachten:

| n | Formel              | Ergebnis                 |
|---|---------------------|--------------------------|
| 1 | $(1+1/2)^2$         | $\approx 2.25$           |
| 2 | $(1+1/12)^{12}$     | $\approx 2.613035290225$ |
| 3 | $(1+1/365)^{365}$   | $\approx 2.714567482022$ |
| 4 | $(1+1/500)^{500}$   | $\approx 2.715568520652$ |
| 5 | $(1+1/1000)^{1000}$ | $\approx 2.716923932236$ |
| 6 | $(1+1/2000)^{2000}$ | $\approx 2.717602569323$ |
| 7 |                     |                          |

Man erkennt, dass auf diese Weise kein beliebig hoher Zinsertrag erwirtschaftet werden kann. Erstaunlicherweise streben die Zahlen  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  für größer werdende n gegen einen Grenzwert, nämlich gegen 2.71828182845904.... (Eulersche Zahl). Mit dem Grenzwert-Befehl von Geogebra kann dies überprüft werden.

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 7 | Grenzwert $[(1+1/n)^n, \infty]$ |
|   | $\approx 2.718281828459$        |

