LÖSUNG ZU 137:

$f(x) = 5 \cdot b^x$ mit $b \in (0; 1)$

a) 1)
Da die vier Rechtecke jeweils gleich breit sein sollen, hat jedes dieser Rechtecke eine Breite von 1. Da die Funktion streng monoton fallend ist, müssen wir für die Höhe der jeweiligen Rechtecke jeweils den Funktionswert am rechten Rand des Teilintervalls nehmen. Es gilt also:

$$U_4 = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$$

Da wir mithilfe von b einen Term zur Berechnung von U_4 angeben sollen, bestimmen wir noch die entsprechenden Funktionswerte:

$$U_4 = 5 \cdot b + 5 \cdot b^2 + 5 \cdot b^3 + 5 \cdot b^4 = \boldsymbol{5 \cdot (b + b^2 + b^3 + b^4)}$$

2)
Um diese Gleichung zu lösen, bilden wir zunächst die entsprechende Obersumme O_4. Auch hier sind die Rechtecke wieder jeweils 1 breit und als Höhe müssen wir jeweils den linken Rand des entsprechenden Teilintervalls nehmen:

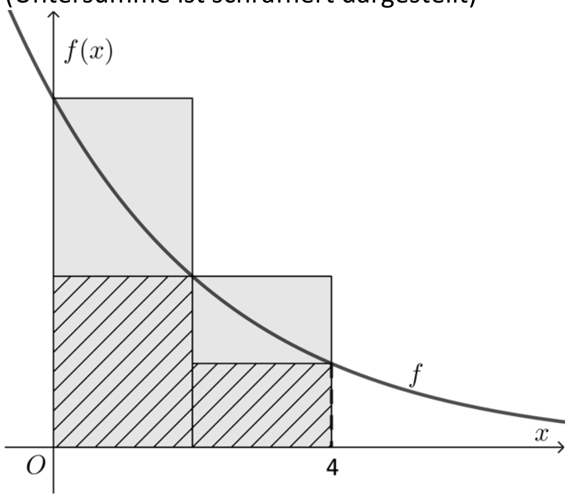
$$O_4 = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) = 5 + 5 \cdot b + 5 \cdot b^2 + 5 \cdot b^3$$

Es gilt also:

$$O_4 - U_4 = 5 + 5 \cdot b + 5 \cdot b^2 + 5 \cdot b^3 - (5 \cdot b + 5 \cdot b^2 + 5 \cdot b^3 + 5 \cdot b^4) = 5 - 5 \cdot b^4 = 1$$

Es ergeben sich durch Umformen bzw. mit Technologie die Lösungen $-0{,}945\ldots$ und $0{,}945\ldots$
Da $b \in (0; 1)$ gilt also $\boldsymbol{b = 0{,}945}\ldots$

b) 1)
Die entsprechenden Rechtecke müssen jeweils eine Breite von 2 haben. Für Ober- bzw. Untersumme verwenden wir als Höhe den linken bzw. rechten Rand und skizzieren:
(Untersumme ist schraffiert dargestellt)



2)
Der tatsächliche (exakte) Flächeninhalt kann mithilfe des bestimmten Integrals $\int_0^4 f(x)dx$ berechnet werden. Da die Funktion jedoch nicht linear verläuft, sondern linksgekrümmt ist, geben die jeweiligen arithmetischen Mittel nicht die genaue Fläche aus. Die Gleichung ist somit falsch.