Lösung Beispiel 1042.)

a) Die Höhe h_a steht normal auf die Seite a und geht durch den Eckpunkt A. Ein Richtungsvektor der Höhe ist daher ein Normalvektor auf die Seite a, als Punkt kann der Eckpunkt A verwendet werden.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_a: X = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Man muss jene Geraden finden, deren Richtungsvektor parallel zum Vektor $\overrightarrow{AC}$ sind.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gerade A ist nicht parallel, da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

Gerade B ist parallel, da $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist: $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gerade C ist nicht parallel, da $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

Gerade D ist parallel, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist und dieser ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

Gerade E ist nicht parallel, da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist und dieser kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

c) Eine Streckensymmetrale steht normal auf ihre Seite und geht durch den Mittelpunkt der Seite. Der Punkt (-4/-5) ist der Mittelpunkt der Seite c, denn es gilt:

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right) = (-4|-5)$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor auf die Seite c, denn es gilt:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um den Umkreismittelpunkt zu erhalten, müssen die beiden Geraden geschnitten werden:

I: $-4 + 4t = -2,5 + 7s$ ➔ I: $-4 + 4t = -2,5 + 7s$

II: $-5 + 4t = -3,5 + s$ | • (-1) ➔ II: $5 - 4t = 3,5 - s$

$1 = 1 + 6s$ ➔ $s = 0$

Durch Einsetzen in s_a erhält man den Umkreismittelpunkt:

$$U = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2,5|-3,5)$$

d) Es ist zu zeigen, dass gilt: $2 \cdot \overrightarrow{M_{AC}S} = \overrightarrow{SB}$

$$M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (A + C) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (-4,5|-1,5)$$

$$\overrightarrow{M_{AC}S} = S - M_{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{11}{6} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{SB} = B - S = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{M_{AC}S}$ ist genau doppelt so lang wie der Vektor $\overrightarrow{SB}$, daher teilt der Schwerpunkt die Schwerlinie im Verhältnis 1:2.

e) Die beiden Geraden sind ident. Das Dreieck muss ein gleichschenkliges Dreieck sein. In diesem Dreieck ist die Höhe auf die Basis gleichzeitig Symmetrieachse.