Lösung Aufgabe 245

a)

Die mittlere Änderungsrate einer Funktion f in einem Intervall [a; b] ist definiert durch $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Durch die Angabe des Intervalls [v_1; v_2] ist klar, dass der Buchstabe v als Variable betrachtet werden soll.

Man setzt nun ein: Die Funktion f entspricht der Reichweite R und a bzw. b sind v_1 bzw. v_2. Der Buchstabe α bleibt unverändert. Einsetzen und Anwenden einer binomischen Formel liefert:

$$\frac{R(v_2)-R(v_1)}{v_2-v_1}=\frac{\frac{v_2^2}{10}\cdot\sin(2\cdot\alpha)-\frac{v_1^2}{10}\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{v_2-v_1}=\frac{1}{10}\cdot\frac{(v_2^2-v_1^2)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{v_2-v_1}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{(v_2-v_1)\cdot(v_2+v_1)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{v_2-v_1}=\frac{(v_2+v_1)\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{10}$$

Um die momentane Änderungsrate der Reichweite pro Grad zu berechnen, bestimmt man zunächst die erste Ableitung der Funktion R nach der Variablen α.

$$R'(\alpha)=\frac{v^2}{10}\cdot\cos(2\cdot\alpha)\cdot 2=\frac{v^2}{5}\cdot\cos(2\cdot\alpha)$$

Einsetzen von v = 25 m/s und α = 30° ergibt $\frac{25^2}{5}\cdot\cos(2\cdot 30)=62{,}5$ m/°.

b)

Die Funktion R(v), für die die Graphen A, B und D zur Auswahl stehen, ist eine quadratische Funktion (man denkt sich für α eine konstante Zahl). Mit steigendem v erhöht sich die Reichweite, das schließt den Graphen B aus. Der Graph A hat die typische Form einer quadratischen Funktion.

Für die Funktion R(α) (v konstant) stehen die Graphen C und E zur Wahl. Durch Einsetzen ergibt sich für α = 0° eine Reichweite von 0 m. Damit kann nur der Graph E zu R(α) passen.

Bei der zweiten Frage soll man mit der Differentialrechnung und mit dem Einheitskreis zeigen, dass bei gegebener Abstoßgeschwindigkeit die größte Reichweite bei α = 45° gegeben ist.

Es ist also das globale Maximum der Funktion R(α) gesucht, wobei der Winkel α sinnvollerweise aus dem Intervall [0°; 90°] kommen muss.

Man bildet die erste Ableitung der Funktion und setzt diese null.

$$R'(\alpha) = \frac{v^2}{5} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = 0$$

Division durch $\frac{v^2}{5}$ liefert die Gleichung $\cos(2 \cdot \alpha) = 0$ (v wird dabei als $\neq 0$ angenommen, weil sonst die Reichweite immer null wäre). Die Cosinusfunktion hat in [0°; 90°] eine Nullstelle bei 90°. Also ist $2 \cdot \alpha = 90°$ und $\alpha = 45°$. Die Reichweite bei 45° beträgt $R(45°) = \frac{v^2}{10} \cdot \sin(2 \cdot 45°) = \frac{v^2}{10} \cdot 1 = \frac{v^2}{10}$.

Nur an den Randstellen des Intervalls könnten noch größere Funktionswerte auftreten, weil diese durch die Nullstellen der ersten Ableitung nicht erfasst werden:
$R(0°) = 0$ und $R(90°) = 0$.
Damit liegt das globale Maximum der Funktion R in [0°; 90°] bei $\alpha = 45°$.

Im Einheitskreis sieht man, dass der Sinus seinen größten Wert bei 90° annimmt. Das Argument $2 \cdot \alpha$ muss also 90° sein, um bei konstantem v die größte Reichweite R zu ergeben. Aus $2 \cdot \alpha = 90°$ folgt ebenfalls $\alpha = 45°$.