



Mathematik anwenden

HAK

5. und 6. Semester



R

Lösungen

10

Mathematik anwenden HAK 3, Lösungen

Schulbuchnummer: **175802**

Die Aufnahme in den Anhang zur Schulbuchliste für Handelsakademien für den III. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik wurde vom Bundesministerium für Bildung und Frauen mit GZ BMBF-5.018/0049-B/8/2015 vom 15. April 2016 empfohlen.

Liebe Schülerin, lieber Schüler,
Sie bekommen dieses Schulbuch von der Republik Österreich für Ihre Ausbildung.
Bücher helfen nicht nur beim Lernen, sondern sind auch Freunde fürs Leben.

Kopierverbot

Wir weisen darauf hin, dass das Kopieren zum Schulgebrauch aus diesem Buch verboten ist – § 42 Abs. 6 Urheberrechtsgesetz: „Die Befugnis zur Vervielfältigung zum eigenen Schulgebrauch gilt nicht für Werke, die ihrer Beschaffenheit und Bezeichnung nach zum Schul- oder Unterrichtsgebrauch bestimmt sind.“

Umschlagbild: Per Winblad / Corbis

Technische Zeichnungen: Paulo Tosold, Wien; Reinhard Wolfmayr, Wien

1. Auflage (Druck 0001)

© Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2016

www.oebv.at

Alle Rechte vorbehalten.

Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, gesetzlich verboten.

Redaktion: Carolina Hüttinger, Wien

Lektorat: Michaela Lackner, Salzburg; Martin Schrödl, Neutal

Herstellung: Raphael Hamann, Wien

Umschlaggestaltung: Petra Michel, Essen

Layout: Da-TeX Gerd Blumenstein, Leipzig

Satz: Da-TeX Gerd Blumenstein, Leipzig

Druck: Brüder Glöckler GmbH, Wöllersdorf

ISBN 978-3-209-08079-0 (Mathematik anwenden HAK LÖS 3)



Mathematik anwenden

HAK

Lösungen



Franz Pauer
Martina Scheirer-Weindorfer
Andreas Simon

Mit einer Online-Ergänzung auf www.oebv.at

Inhaltsverzeichnis

1	Logarithmen	5
1.1	Dekadischer und natürlicher Logarithmus.....	5
1.2	Rechenregeln für Logarithmen.....	5
1.3	Exponentialgleichungen.....	6
	Zusammenfassende Aufgaben.....	7
2	Zins- und Zinseszinsrechnung	9
2.1	Zinseszinsrechnung.....	9
2.2	Anwendungen im Bankwesen.....	11
	Zusammenfassende Aufgaben.....	13
3	Exponential- und Logarithmusfunktionen	15
3.1	Exponentialfunktionen.....	15
3.2	Logarithmusfunktionen.....	19
3.3	Wachstums- und Abnahmeprozesse.....	24
	Zusammenfassende Aufgaben.....	29
4	Rentenrechnung und Schuldtilgung	33
4.1	Zahlungsströme.....	33
4.2	Grundlagen der Rentenrechnung.....	33
4.3	Vergleich von Zahlungen.....	39
4.4	Rentenkonvertierung.....	41
4.5	Tilgungspläne.....	42
	Zusammenfassende Aufgaben.....	46
5	Investitions-, Kurs- und Rentabilitätsrechnung	49
5.1	Investitionsrechnung.....	49
5.2	Kurs- und Rentabilitätsrechnung.....	53
	Zusammenfassende Aufgaben.....	55

Hinweise zum Gebrauch des Lösungshefts:

- Das Lösungsheft ist zur Kontrolle und nicht zum Abschreiben gedacht. Arbeite deshalb ehrlich, löse jede Aufgabe selbstständig und kontrolliere erst dann die Ergebnisse.
- Zu den Aufgaben, die im Schulbuch mit dem Technologiesymbol gekennzeichnet sind, stehen Dateien auf Mathematik anwenden HAK-Online zur Verfügung, die zeigen, wie eine mögliche Lösung aussehen kann. Online-Codes im Lösungsheft führen direkt zu diesen Dateien.



ggb GeoGebra



xls Excel



tns TI Nspire

- Die Figuren im Lösungsheft sind meist verkleinert dargestellt, sodass aus ihnen keine Längen entnommen werden können.
- Das Lösungsheft wurde mit großer Sorgfalt erstellt. Sollten trotzdem Fehler passiert sein, so bitten wir, dies dem Verlag (Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, E-Mail: bbs@oebv.at) mitzuteilen. Wünsche und Anregungen werden ebenfalls gerne entgegengenommen.

1 Logarithmen

1.1 Dekadischer und natürlicher Logarithmus

2 a. 0 b. -2 c. 2 d. $\frac{1}{3}$ e. 2 f. -3 g. 8 h. $\frac{2}{3}$

3 a. 0 b. -1 c. 2 d. $\frac{1}{3}$ e. 17 f. -2 g. 4 h. $-\frac{1}{2}$

4 a. 0 b. -3 c. 1 d. $\frac{1}{4}$ e. 17 f. -7 g. 11 h. $-\frac{1}{2}$

5 a. 1,58 d. 1,49 g. -0,36 j. 1,34
b. 0,3 e. -0,52 h. 1,05 k. 3,72
c. 1,61 f. 2,89 i. 6,24 l. -0,22

6 I. a. C b. B II. a. C b. D

7 A, D

8 B

9 B, D

A ist falsch, weil $\lg(0,0001) = \lg(10^{-4}) = -4$ ist.

C ist falsch, weil $\log_4(64) = \log_4(4^3) = 3$ ist.

B ist richtig, weil $\ln(e^3) = 3$ ist.

D ist richtig, weil $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3(3^{-4}) = -4$ ist.

10 a. $\lg(0,00001) = \lg(10^{-5}) = -5$

c. $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3$

b. $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3$

d. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = \log_2(2^{-5}) = -5$

11 Weil $a^1 = a$ ist, muss auch $\log_a(a) = 1$ sein.

12 für alle Zahlen $b < 0$

13 für alle Zahlen $n > 0$

14 C, denn 235 liegt zwischen $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$.

15 C, denn 0,00235 liegt zwischen 10^{-3} und 10^{-2} .

16 a. $\log_{100}(t) = x \Leftrightarrow 100^x = t \Leftrightarrow 10^{2x} = t \Leftrightarrow 2x = \log_{10}(t) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_{10}(t) \Rightarrow \log_{100}(t) = \frac{1}{2} \log_{10}(t)$

b. $\log_8(t) = x \Leftrightarrow 8^x = t \Leftrightarrow 2^{3x} = t \Leftrightarrow 3x = \log_2(t) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \log_2(t) \Rightarrow \log_8(t) = \frac{1}{3} \log_2(t)$

17 Siehe Schulbuch Seite 180.

18 Siehe Schulbuch Seite 180.

1.2 Rechenregeln für Logarithmen

20 a. $\lg(7) + 3 \lg(x) + 5 \lg(y)$

e. $\frac{1}{2}(\lg(5) + 7 \lg(x) + 6 \lg(y) + 2 \lg(z))$

b. $\ln(5) + 2 \ln(x) + \ln(y)$

f. $\frac{1}{3}(\ln(9) + 5 \ln(x) + 3 \ln(y) + \ln(z))$

c. $\lg(14) + 3 \lg(a) + \lg(b) + 4 \lg(c)$

g. $\frac{1}{2}(\lg(2) + 3 \lg(a) + 2 \lg(b) - 4 \lg(c) - \lg(d))$

d. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \ln(a) + 2 \ln(b) + 3 \ln(c)$

h. $\frac{1}{4}(\ln(3) + 5 \ln(a) + \ln(b) - 7 \ln(c) - 2 \ln(d))$



- 21 a. $2 \lg(x) + \lg(y) - 3 \lg(z)$ e. $4 \lg(x) + 3 \lg(y) - 3 \lg(z + w)$
 b. $3 \lg(a) - 2 \lg(b) - \lg(c)$ f. $7 \lg(a) + 3 \lg(b) - \frac{1}{2} \lg(c + d)$
 c. $\frac{1}{3} \log_2(4) + \log_2(8) - \log_2(16) = \frac{2}{3} + 3 - 4 = -\frac{1}{3}$ g. $\frac{2}{3} \lg(x) + \frac{1}{2} \lg(x) - \frac{1}{3} \lg(x) = \frac{5}{6} \lg(x)$
 d. $3 \lg(a) + 2 \lg(b) - 4 \lg(c + d)$ h. $\frac{3}{2} \lg(a) + \frac{1}{4} \lg(a) - \frac{3}{4} \lg(a) = \lg(a)$

- 22 Erster Fehler im ersten Schritt: $\lg(\sqrt{3x^4y^3z^2}) = \frac{1}{2} \lg(3x^4y^3z^2)$
 Zweiter Fehler im zweiten Schritt: Die Klammer wurde vergessen.
 Richtig ist:

$$\lg(\sqrt{3x^4y^3z^2}) = \frac{1}{2} \lg(3x^4y^3z^2) = \frac{1}{2} (\lg(3) + \lg(x^4) + \lg(y^3) + \lg(z^2)) = \frac{1}{2} (\lg(3) + 4 \lg(x) + 3 \lg(y) + 2 \lg(z))$$

- 24 a. $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{x} \cdot z}{\sqrt[5]{y^2}}\right)$ c. $\lg\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2} \cdot z}\right)$ e. $\lg\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}}\right) = \lg(\sqrt{a - b})$
 b. $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{a} \cdot b}{\sqrt[3]{c^2}}\right)$ d. $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}{\sqrt[3]{x - y}}\right) = \lg\left(\frac{\sqrt[3]{(x - y)(x + y)}}{\sqrt[3]{x - y}}\right) = \lg(\sqrt[3]{x + y})$ f. $\lg\left(\frac{1}{a + b}\right)$

- 25 a. C b. B

- 26 a. $\lg(100\,000)$ b. $\lg(35)$

- 27 Siehe Schulbuch Seite 180.

- 28 Siehe Schulbuch Seite 180.

1.3 Exponentialgleichungen

- 30 a. 2,996 c. 1,167 e. 0,503 g. 2,747
 b. 1,956 d. 1,651 f. -2,554 h. 1,320

- 31 a. C b. A

- 33 a. 6,0259 b. 30,9989 c. 11,2067 d. 3,5599

- 34 a. 0,792 c. 3,322 e. 5,334 g. 48,281
 b. 3,892 d. 6,644 f. -5,585 h. 64,685

- 35 a. Der Fehler wurde beim Übergang von der zweiten auf die dritte Zeile gemacht. Richtig ist:

$$\lg(1000 \cdot 0,4^{x-1}) = \lg(50)$$

$$\lg(1000) + (x - 1) \lg(0,4) = \lg(50)$$

- b. Der Fehler wurde beim Übergang von der fünften auf die sechste Zeile gemacht. Richtig ist:

$$x = \frac{\lg(12)}{\lg(2)} \approx \frac{1,079}{0,301} \approx 3,585$$

- 37 ca. 10,51 Jahre, also ca. 10 Jahre und 6 Monate

- 38 ca. 13,72 Jahre, also ca. 13 Jahre und 8 Monate

- 39 ca. 28,07 Jahre, also ca. 28 Jahre und 1 Monat

- 40 ca. 21,67 Jahre, also ca. 21 Jahre und 8 Monate

- 42 a. 3,78 b. 5,51 c. 3,95

- 43 a. 8,53 b. 10,98 c. 20,15 d. 14,27

ggb/tns
p6bk7zggb/tns
wg4h6h

- 44 a. $-53,78; 0,58$ b. $4,33$ c. $1,79$
- 45 a. Ja, die Berechnung ist richtig. b. $x \approx 0,79$
- 46 Siehe Schulbuch Seite 180.
- 47 Siehe Schulbuch Seite 180.
- 48 Siehe Schulbuch Seite 180.

Zusammenfassende Aufgaben

- 49 a. 5 b. -2 c. 0 d. -4
- 50 ca. 18 Jahre (17,96 Jahre)
- 51 a. $\lg(a) + \lg(b) + \lg(c)$ d. $\ln(6) + 3\ln(a) + 5\ln(b)$ g. $\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(x)$
 b. $2\lg(a)$ e. $2\lg(u) - \lg(v)$ h. $\frac{1}{3}\ln(a) - \frac{2}{3}\ln(b)$
 c. $4\ln(x) + 3\ln(y)$ f. $2\lg(a) + \lg(b) - 3\lg(c) - \lg(d)$
- 52 **D**, denn 100 liegt zwischen $2^6 = 64$ und $2^7 = 128$.
- 53 a. 3,881 b. 2,520 c. 3,843 d. 3,102
- 54 a. D b. C
- 55 a. $\lg(112,5)$ b. $\lg(10)$
- 56 **E**
- 57 a. C b. B
- 58 a. Der Fehler wurde beim Übergang von der ersten auf die zweite Zeile gemacht. Richtig ist:
 $8 \cdot 0,5^{x+2} = 32$
 $0,5^{x+2} = 4$
- b. Der Fehler wurde beim Übergang von der fünften auf die sechste Zeile gemacht. Richtig ist:
 $2x - 1 = \frac{\lg(20)}{\lg(5)}$
 $x = \frac{1}{2} \left(\frac{\lg(20)}{\lg(5)} + 1 \right) \approx 1,431$
- 59 **D**, denn 1512 liegt zwischen $10^3 = 1000$ und $10^4 = 10000$.
- 60 a. A b. D
- 61 a. Die Zerlegung ist nicht richtig. Richtig ist $\ln\left(\frac{x^2 y}{z^3}\right) = \ln(x^2) + \ln(y) - \ln(z^3) = 2\ln(x) + \ln(y) - 3\ln(z)$.
- b. Die Zerlegung ist nicht richtig. Richtig ist $\lg(\sqrt[4]{a^2 b^3}) = \frac{1}{4}\lg(a^2 b^3) = \frac{1}{2}\lg(a) + \frac{3}{4}\lg(b)$.
- 62 in 6,2 Jahren
- 63 **B**, **C**
- 64 a. C b. A
- 65 Weil $b^0 = 1$ ist, ist $\log_b(1) = \log_b(b^0) = 0$.
- 66 Für alle Zahlen $x > 0$ ist $\lg(10^x) = x \cdot \lg(10) = x$ positiv.

Aufgaben 67–70



ggb/tns
4a47ze

67 0,292

68 B, denn 400 liegt zwischen $5^3 = 125$ und $5^4 = 625$.



ggb/tns
s899sm

69 a. Ja, die Berechnung ist richtig. b. $x \approx 0,693$

70 D

2 Zins- und Zinseszinsrechnung

2.1 Zinseszinsrechnung

71	a.	b.	c.	d.	e.	f.
p	2	3	4,5	3,25	1,25	10
i	0,02	0,03	0,045	0,0325	0,0125	0,1
q	1,02	1,03	1,045	1,0325	1,0125	1,1

72 a. C b. D

74 507,50 €

75 a. 1002,50 € b. 810 € c. 5112,50 € d. 654,88 €

76 a. B b. C

78 436,16 €

79 a. 1298,91 € b. 1655,71 € c. 2122,72 € d. 1925,55 €

80 D

82 5,92% p.a.

83 1,924% p.a.

84 9,051% p.a.

85 –

87 4683,96 €

88 4187,42 €

89 a. 1000 € b. 500 € c. 800 € d. 1000 €

90 a. C b. A

91 3% $\Rightarrow K_0 = 8626,09 \text{ €}$; 0,15% $\Rightarrow K_0 = 9925,34 \text{ €}$

Die Aussage stimmt nicht, weil 0,15% ein 20stel von 3% ist, aber 9925,34 nicht das 20-Fache von 8626,09 ist.

93 a. 20263,18 € b. 20266,66 €

94 a. 1002,05 € b. 1002,08 €

95 a. 3028,80 € b. 3029,16 €

96 a. 15122,33 € b. 15123,95 €

97 a. 38204,30 € b. 38205,47 €

98 a. 137410,76 € b. 137418,46 €

99 a. I. 6017,10 €; II. 6372,20 € b. I. 6017,37 €; II. 6373,14 €

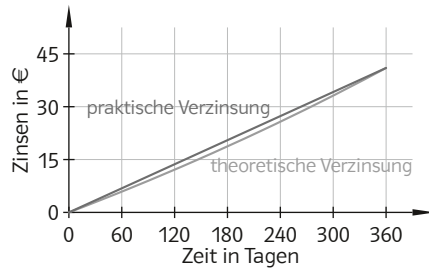
100 a. C b. B

101 a. 24,98 € b. 40,81 €



ggb/xls/tns
8r8ug8

102 a./b.



- c. Je größer der Zinssatz ist, desto größer ist der Unterschied. Zum Zeitpunkt 0 Tage und zum Zeitpunkt 360 Tage liefern beide Methoden das gleiche Ergebnis, der Unterschied ist zum Zeitpunkt 180 Tage am größten.



Link
rb6j3b

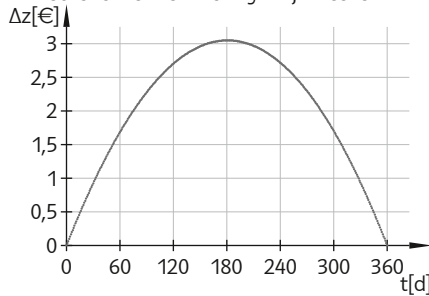
103 Siehe Mathematik anwenden HAK-Online.



ggb/xls
gq26yh

104

- a. die praktische Verzinsung
b. am Anfang und am Ende des Jahres
c. am 180. Tag des Bankjahres, also am 30. Juni
d. Zinsdifferenz zwischen praktischer und theoretischer Verzinsung im Jahresverlauf



106 7157,23 €

107 6768,61 €

108 **B**

110 21 Jahre, 1 Monat und 19 Tage

111 3 Jahre, 2 Monate und 15 Tage

112 a. C b. D

113 a. 23 Jahre und 162 Tage b. 23 Jahre und 162 Tage c. 23 Jahre und 162 Tage

114 a. Dunja hat recht. Wenn sich ein Kapital K nach n Jahren verdoppelt hat, dann ist $2 \cdot K = K \cdot q^n$, daher $2 = q^n$, $\ln(2) = n \cdot \ln(q)$ und $n = \frac{\ln(2)}{\ln(q)}$.

b. Branko hat auch recht. Wenn sich ein Kapital K nach n Jahren verdreifacht hat, dann ist $3 \cdot K = K \cdot q^n$, also $3 = q^n$, $\ln(3) = n \cdot \ln(q)$ und $n = \frac{\ln(3)}{\ln(q)}$.


c. Wenn ein Kapital K nach n Jahren auf das 5-Fache angewachsen ist, dann ist $5 \cdot K = K \cdot q^n$, also $5 = q^n$, $\ln(5) = n \cdot \ln(q)$ und $n = \frac{\ln(5)}{\ln(q)}$.

115 Siehe Schulbuch Seite 180.

116 Siehe Schulbuch Seite 180.

- 117 Siehe Schulbuch Seite 180.
 118 Siehe Schulbuch Seite 180.
 119 Siehe Schulbuch Seite 180.
 120 Siehe Schulbuch Seite 180.

2.2 Anwendungen im Bankwesen

- 122 947,87€
 123 5123,37€
 124 a. 11200,04€ b. 11200,45€
 125 a. 7235,41€ b. 7235,57€
 126 a. B b. D
 128 Zinsen: 24,62€, KEST: 6,16€
 129 a. 16,93€ b. 12,70€
 130 Zinsen: 26,22€, Guthaben: 1159,66€
 131 Zinsen: 30,59€, Guthaben: 1207,94€
 132 $0,0375 = 3,75\%$ p. a.
 133  xls
 hb94x7 Unterschiede ergeben sich in der Berechnung der Tage bei 360 Tagen Bankjahr.
 134 Luis hat nicht recht, er hat die 25% KEST nicht korrekt abgezogen. Korrekt wäre
 $2,25\% \cdot 0,75 = 1,6875\%$ und somit $10\,000 \cdot 1,6875\% = 168,75\text{€}$.
 136 Endwert: 58 027,04€; $i_{\text{eff}} = 3,02\%$; $i_{\text{nom}} = 3\%$
 137 Endwert: 12 701,11€; $i_{\text{eff}} = 3,03\%$; $i_{\text{nom}} = 3\%$
 138 Endwert: 5 372,89€; $i_{\text{eff}} = 2,43\%$; $i_{\text{nom}} = 2,4\%$
 139 Endwert: 9 407,41€; $i_{\text{eff}} = 6,09\%$; $i_{\text{nom}} = 6\%$
 140 5 380,28€
 141 750,76€
 142 3 476,29€
 143 6 499,60€
 144 a. D b. C
 145 a. 2,120% b. 2,117% c. 2,111%
 147 10 Jahre, 2 Monate und 26 Tage
 148 10 Jahre und 27 Tage
 149 4 Jahre, 3 Monate und 11 Tage
 150 10 Jahre, 9 Monate und 1 Tag
 151 C

- 152** a. 19,60 Jahre b. 19,43 Jahre c. 19,34 Jahre d. 19,28 Jahre
 Alle vier Zinssätze entsprechen einem nominellen Jahreszinssatz von 3,6% p.a. Bei monatlicher Kapitalisierung verdoppelt sich das Kapital am schnellsten, der Unterschied ist allerdings nicht allzu groß.

153

Zinsfuß p	Verdoppelungszeit in Jahren	
	exakt	Faustregel
0,5	138,98	140
1	69,66	70
1,5	46,56	46,67
2	35,00	35
2,5	28,07	28
3	23,45	23,33
3,5	20,15	20
4	17,67	17,5
4,5	15,75	15,56
5	14,21	14
5,5	12,95	12,73
6	11,90	11,67
6,5	11,01	10,77
7	10,24	10
7,5	9,58	9,33
8	9,01	8,75
8,5	8,50	8,24
9	8,04	7,78
9,5	7,64	7,37
10	7,27	7

Die nach der Faustregel berechnete Zahl ist für die untersuchten Zinssätze ab einem Zinssatz von 2% kleiner als die exakt berechnete.

- 154** a. ca. 56 Semester = 28 Jahre b. bei ca. 4,375%
155 bei 3,53% p.s.
156 bei 2,51% p.q.
158 4 263,55 €
159 a. 22 187,71 € b. 22 213,07 € c. 22 226,04 € d. 22 234,80 €
160 zurückzahlender Betrag: 8 490,91 €; effektiver Jahreszinssatz: 6,136% p.a.
161 Weil bereits unter dem Jahr Zinseszinsen anfallen.
163 $i_4 = 0,0198 = 1,98\%$ p.q.; $i_{12} = 0,00656 = 0,656\%$ p.m.; $i_{\text{eff}} = 0,0816 = 8,16\%$ p.a.
164 a. nicht äquivalent b. äquivalent c. nicht äquivalent

165

	p.a.	p.s.	p.q.	p.m.
a.	4%	1,98%	0,99%	0,33%
b.	5,06%	2,5%	1,24%	0,41%
c.	2,52%	1,25%	$\frac{5}{8}\%$	0,21%
d.	2,02%	1%	0,50%	$\frac{1}{6}\%$

188 28 Jahre und 4 Tage

189 a. 50 406,25 € b. 50 403,96 €

190 13 672,58 €

191 Zinsen: 109,45 €; Guthaben: 8 382,09 €

192 4 869,75 €

193 A D B C

194 Zinsen: 83,53 €; Guthaben: 8 012,65 €

195 10 250 €

196 7 Jahre, 11 Monate und 8 Tage

197 9 282,60 €

198 28 Jahre und 4 Tage

199

	p.a.	p.s.	p.q.	p.m.
a.	2,45%	1,22%	0,61%	0,20%
b.	1,51%	0,75%	0,375%	0,12%
c.	3,02%	1,5%	0,75%	0,25%
d.	0,98%	0,49%	0,24%	0,0815%

200 a. 40 226,94 € b. 40 225,17 €

201 a. 20 764,24 € b. 1,26% p.a.

202 2,125% p.a.

203 3 072,70 €

204 a. 15% p.a. b. 15,7625% p.a.

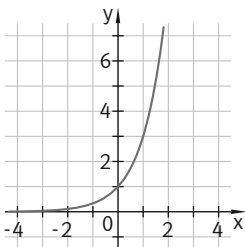
205 a. 11 258,99 € c. 11 270,92 € e. 11 274,96 €
 b. 11 266,91 € d. 11 273,61 €

3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

3.1 Exponentialfunktionen

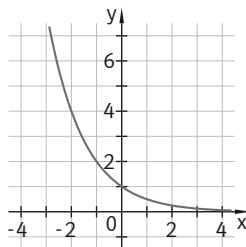
206 a. $f(x) = 3^x$

x	f(x)
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9



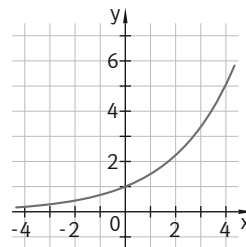
b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	f(x)
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



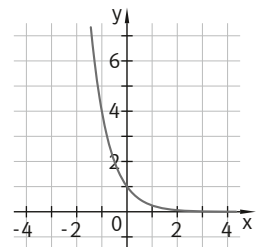
c. $f(x) = 1,5^x$

x	f(x)
-2	$\frac{4}{9}$
-1	$\frac{2}{3}$
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$



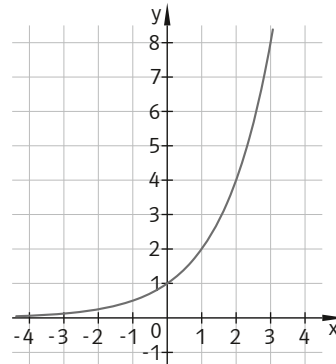
d. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	f(x)
-2	16
-1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$



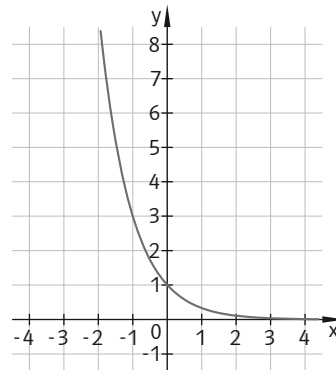
207 a.

x	2^x
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



b.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
-4	81
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	0,3333
2	0,1111
3	0,037
4	0,0123



220 a. C b. D

221 **A** und **D**, weil f eine streng monoton wachsende Funktion ist und daher für alle x aus $[2; 3]$ die Funktionswerte $f(x)$ im Intervall $[f(2); f(3)]$, also im Intervall $[2^2; 2^3] = [4; 8]$ liegen.

222 Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -2 ist. Daher ist $(-2)^{\frac{1}{2}}$ nicht definiert. Ebenso gibt es keine reelle Zahl, deren 4. Potenz -2 ist, daher ist auch $(-2)^{\frac{1}{4}}$ nicht definiert. Vermutung: Wenn a eine ungerade ganze Zahl, b eine grade ganze Zahl $\neq 0$ ist, und a und b keine gemeinsamen Teiler haben, dann ist $(-2)^{\frac{a}{b}}$ nicht definiert.

224 a. um 25% c. um 6,09% e. um 41,42%
 b. um 4,04% d. um 200% f. um 237,5%

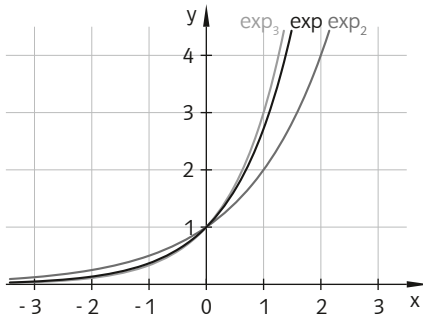
225 a. um 10% c. um 36,39% e. um 20%
 b. um 75% d. um 27,1% f. um 25%

227 a. $a = 1,1$ b. $a = 1,17$ c. $a = 1,002$ d. $a = 1,005$

228 a. $b = 0,97$ b. $b = 0,85$ c. $b = 0,992$ d. $b = 0,995$



229

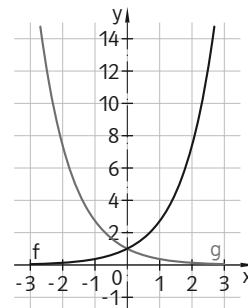


Für $x < 0$ verläuft der Graph von \exp oberhalb des Graphen von \exp_3 und unterhalb des Graphen von \exp_2 . Für $x > 0$ verläuft der Graph von \exp oberhalb des Graphen von \exp_2 und unterhalb des Graphen von \exp_3 .

230

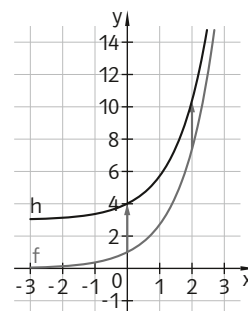
a.

x	f(x)	g(x)
-3	0,050	20,086
-2	0,135	7,389
-1	0,368	2,718
0	1,000	1,000
1	2,718	0,368
2	7,389	0,135
3	20,086	0,050



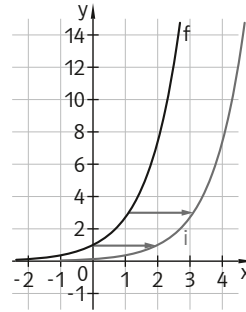
b.

x	f(x)	h(x)
-3	0,050	3,050
-2	0,135	3,135
-1	0,368	3,368
0	1,000	4,000
1	2,718	5,718
2	7,389	10,389
3	20,086	23,086



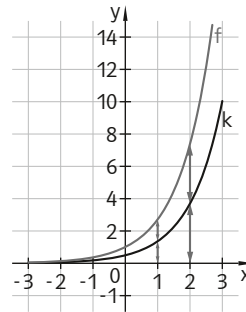
c.

x	f(x)	i(x)
-3	0,050	0,007
-2	0,135	0,018
-1	0,368	0,050
0	1,000	0,135
1	2,718	0,368
2	7,389	1,000
3	20,086	2,718

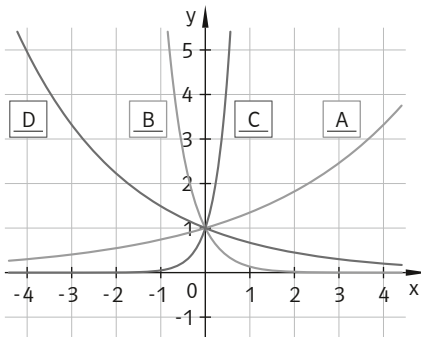


d.

x	f(x)	k(x)
-3	0,050	0,025
-2	0,135	0,068
-1	0,368	0,184
0	1,000	0,500
1	2,718	1,359
2	7,389	3,695
3	20,086	10,043



231

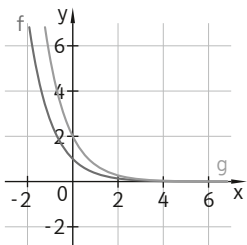


A – gelb und C – grün, weil beide Funktionen mit $k > 0$ streng monoton wachsend sind und A mit $k = 0,3$ weniger stark wächst als C mit $k = 3$.
 B – rot und D – blau, weil beide Funktionen mit $k < 0$ streng monoton fallend sind und B mit $k = -2$ schneller fällt als D mit $k = -0,4$.

232

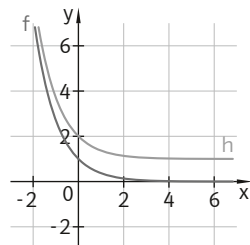
a.

x	e^{-x}	$2e^{-x}$
-2	7,39	14,78
-1	2,72	5,44
0	1	2
1	0,37	0,74
2	0,14	0,27
3	0,05	0,1
4	0,02	0,04



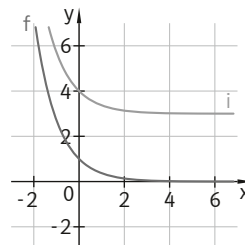
b.

x	e^{-x}	$e^{-x} + 1$
-2	7,39	8,39
-1	2,72	3,72
0	1	2
1	0,37	1,37
2	0,14	1,14
3	0,05	1,05
4	0,02	1,02



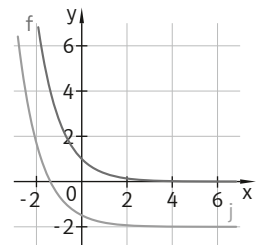
c.

x	e^{-x}	$e^{-x} + 3$
-2	7,39	10,39
-1	2,72	5,72
0	1	4
1	0,37	3,37
2	0,14	3,14
3	0,05	3,05
4	0,02	3,02



d.

x	e^{-x}	$\frac{1}{2}e^{-x} - 2$
-2	7,39	1,69
-1	2,72	-0,64
0	1	-1,5
1	0,37	-1,82
2	0,14	-1,93
3	0,05	-1,98
4	0,02	-1,99



233 **A, D**

235 a. $f(x) = 25 \cdot 125^x$ b. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 16^x$ c. $f(x) = 27 \cdot 243^x$ d. $f(x) = 9 \cdot 3^x$

236 a. $f(x) = 4^{3x+1} = 4 \cdot 64^x$ b. $f(x) = 3^{2x-1} = \frac{1}{3} \cdot 9^x$ c. $f(x) = 2^{6x-3} = \frac{1}{8} \cdot 64^x$ d. $f(x) = 8^{\frac{x}{3}+1} = 8 \cdot 2^x$

237 a. D b. C

238 a. e c. a e. c g. f
 b. a d. b f. d h. b

240 a. $f(x) = e^{0,693x}$ c. $f(x) = e^{0,039x}$ e. $f(x) = e^{-0,357x}$
 b. $f(x) = e^{1,740x}$ d. $f(x) = e^{0,007x}$ f. $f(x) = e^{-0,020x}$

241 a. A b. B

242 Nein, Christoph hat die Aufgabe nicht richtig gelöst. 9^x und 3 darf nicht gekürzt werden. Richtig ist $9 = e^{\ln(9)}$, also ist $f(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{\ln(9) \cdot x}$.

244 a. $f(x) = 7,389^x$ b. $f(x) = 0,449^x$ c. $f(x) = 1,649^x$ d. $f(x) = 0,050^x$ e. $f(x) = 2,858^x$ f. $f(x) = 0,368^x$

245 a. D b. C

246 Ja, die Umformung ist korrekt. Es ist $e^{-4} \approx 0,0183$, daher ist $f(x) = e^{-4 \cdot x} = 0,0183^x$.

247 f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-0,6931x}$

248 Siehe Schulbuch Seite 180.

249 Siehe Schulbuch Seite 180.

250 Siehe Schulbuch Seite 180.

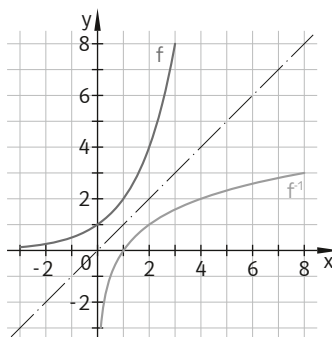
251 Siehe Schulbuch Seite 180.

252 Siehe Schulbuch Seite 180.

3.2 Logarithmusfunktionen

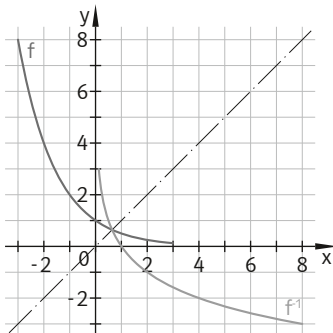
253

x	2^x
-3	0,125
-2,5	0,1768
-2	0,25
-1,5	0,3536
-1	0,5
-0,5	0,7071
0	1
0,5	1,4142
1	2
1,5	2,8284
2	4
2,5	5,6569
3	8

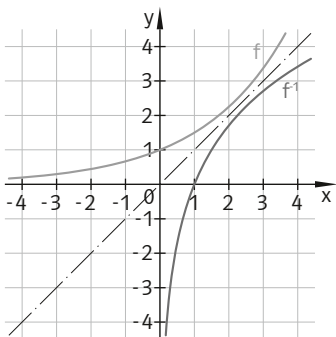


254

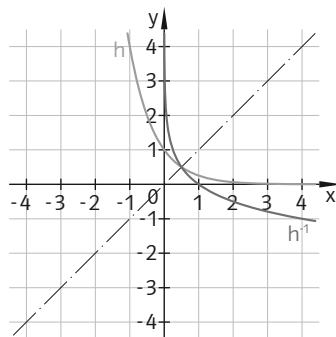
x	$0,5^x$
-3	8
-2,5	5,6569
-2	4
-1,5	2,8284
-1	2
-0,5	1,4142
0	1
0,5	0,7071
1	0,5
1,5	0,3536
2	0,25
2,5	0,1768
3	0,125



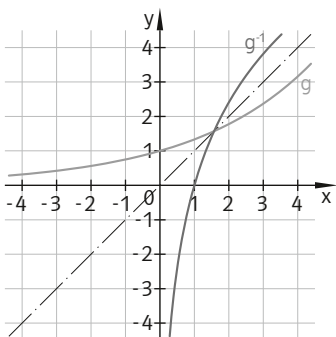
255 a.



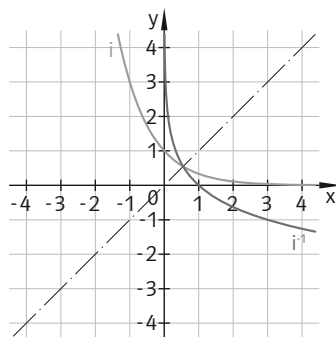
c.



b.



d.



256 a. f mit $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; Umkehrfunktion: f^{-1} mit $f^{-1}(x) = \log_{\frac{3}{2}}(x)$

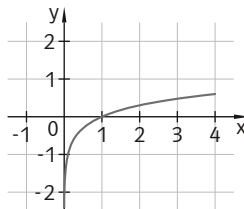
b. g mit $g(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; Umkehrfunktion: g^{-1} mit $g^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{3}}(x)$

c. h mit $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; Umkehrfunktion: h^{-1} mit $h^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x)$

d. i mit $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; Umkehrfunktion: i^{-1} mit $i^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

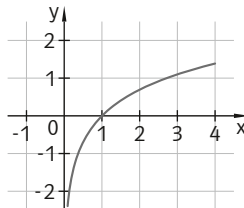
257 a.

x	lg(x)
0,5	-0,3
1	0
2	0,30
3	0,48
4	0,60



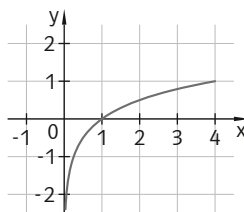
b.

x	ln(x)
0,5	-0,69
1	0
2	0,69
3	1,10
4	1,39



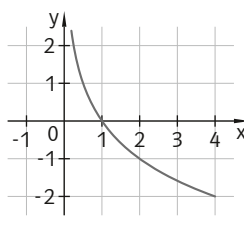
c.

x	log ₄ (x)
0,5	-0,5
1	0
2	0,50
3	0,79
4	1,00



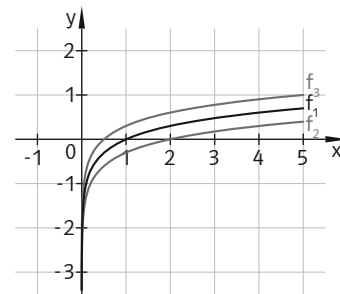
d.

x	log _{1/2} (x)
0,5	1
1	0
2	-1
3	-1,58
4	-2



258 a.

x	f ₁ (x)	f ₂ (x)	f ₃ (x)
0,5	-0,301	-0,602	0
1	0	-0,301	0,301
1,5	0,176	-0,125	0,477
2	0,301	0	0,602
2,5	0,398	0,097	0,699
3	0,477	0,176	0,778
3,5	0,544	0,243	0,845
4	0,602	0,301	0,903
4,5	0,653	0,352	0,954
5	0,699	0,398	1

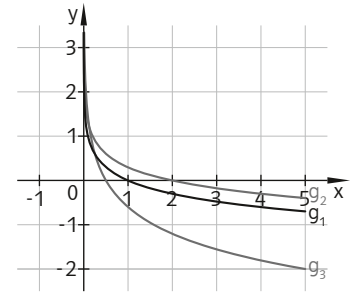


Für alle positiven reellen Zahlen a, b ist $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$. Daher gilt für alle positiven Zahlen x: $f_2(x) = \lg(x) + \lg\left(\frac{1}{2}\right) = f_1(x) - \lg(2)$ und $f_3(x) = \lg(x) + \lg(2) = f_1(x) + \lg(2)$.

Daher erhalten wir den Graphen von f_2 bzw. f_3 , indem wir den Graphen von f_1 um $-\lg(2)$ bzw. $+\lg(2)$ entlang der y-Achse verschieben.

b.

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0,5	0,301	0,602	0
1	0	0,301	-0,602
1,5	-0,176	0,125	-0,954
2	-0,301	0	-1,204
2,5	-0,398	-0,097	-1,398
3	-0,477	-0,176	-1,556
3,5	-0,544	-0,243	-1,690
4	-0,602	-0,301	-1,806
4,5	-0,653	-0,352	-1,908
5	-0,699	-0,398	-2



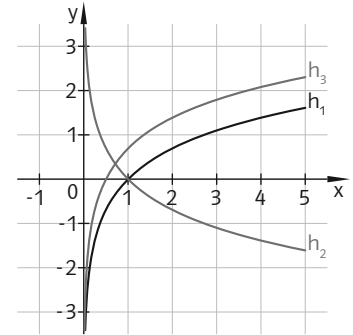
Für alle positiven reellen Zahlen a, b ist $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$ und $\lg(\frac{a}{b}) = \lg(a) - \lg(b)$.

Daher gilt für alle positiven Zahlen x: $g_2(x) = \lg(\frac{1}{x}) + \lg(2) = g_1(x) + \lg(2)$ und $g_3(x) = 2 \cdot \lg(\frac{1}{x}) + 2 \cdot \lg(\frac{1}{2}) = 2 \cdot g_1(x) - 2 \cdot \lg(2)$.

Daher erhalten wir den Graphen von g_2 , indem wir den Graphen von g_1 um $+\lg(2)$ entlang der y-Achse verschieben. Den Graphen von g_3 erhalten wir, indem wir den Graphen von $2 \cdot g_1$ um $-2 \cdot \lg(2)$ entlang der y-Achse verschieben.

c.

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
0,5	-0,693	0,693	0
1	0	0	0,693
1,5	0,405	-0,405	1,099
2	0,693	-0,693	1,386
2,5	0,916	-0,916	1,609
3	1,099	-1,099	1,792
3,5	1,253	-1,253	1,946
4	1,386	-1,386	2,079
4,5	1,504	-1,504	2,197
5	1,609	-1,609	2,303



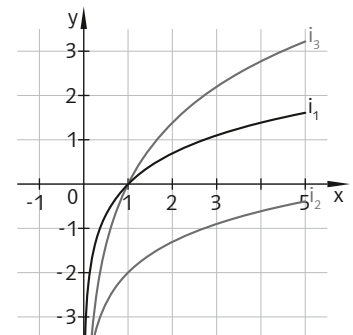
Für alle positiven reellen Zahlen a, b ist $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ und $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

Daher gilt für alle positiven Zahlen x: $h_2(x) = \ln(\frac{1}{x}) = -f_1(x)$ und $h_3(x) = \ln(2) + h_1(x)$.

Daher erhalten wir den Graphen von h_2 , indem wir den Graphen von h_1 an der x-Achse spiegeln. Den Graphen von h_3 erhalten wir, indem wir den Graphen von f_1 um $\ln(2)$ entlang der y-Achse verschieben.

d.

x	$i_1(x)$	$i_2(x)$	$i_3(x)$
0,5	-0,693	-2,693	-1,386
1	0	-2	0
1,5	0,405	-1,595	0,811
2	0,693	-1,307	1,386
2,5	0,916	-1,084	1,833
3	1,099	-0,901	2,197
3,5	1,253	-0,747	2,506
4	1,386	-0,614	2,773
4,5	1,504	-0,496	3,008
5	1,609	-0,391	3,219



Den Graphen von i_2 erhalten wir, indem wir den Graphen von i_1 entlang der y-Achse um -2 verschieben. Den Graphen von i_3 erhalten wir, indem wir jeden Punkt $(a | b)$ des Graphen von i_1 durch $(a | 2b)$ ersetzen.

259 **A, D**

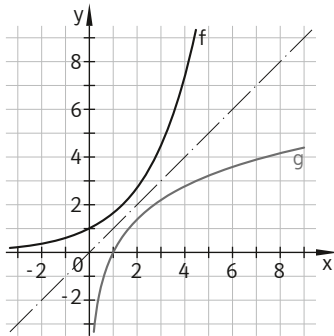
Der Graph der Funktion f in **A** ist monoton wachsend, schneidet die x -Achse in $(1|0)$, $f(2^2) = 2 \cdot f(2)$ und $f(\frac{1}{2}) = -f(2)$. Daher könnte f eine Logarithmusfunktion sein.

Der Graph der Funktion in **B** schneidet die y -Achse, daher kann er nicht Graph einer Logarithmusfunktion sein.

Die Funktion g , deren Graph in **C** gezeichnet ist, kann keine Logarithmusfunktion sein, weil $g(2^2) > 2 \cdot g(2)$ ist.

Der Graph der Funktion h in **D** ist monoton fallend, schneidet die x -Achse in $(1|0)$, $h(2^2) = 2 \cdot h(2)$ und $h(\frac{1}{2}) = -h(2)$. Daher könnte h eine Logarithmusfunktion sein.

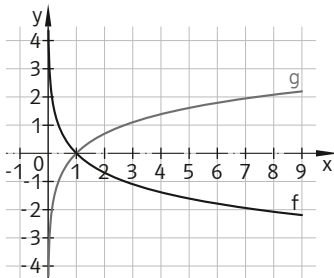
260



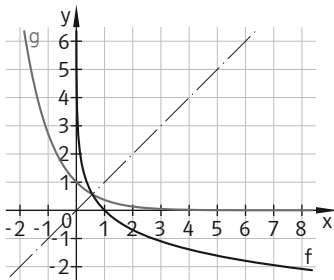
Der Graph der Funktion f ist streng monoton wachsend und weniger „steil“ als der Graph der Funktion Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$.

Die Umkehrfunktion von f ist $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\ln(x)$.

 ggb/tns 261
3bh5dh



Wegen $f(x) = \ln(\frac{1}{x}) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$ (für alle positiven reellen Zahlen x) ist $f(x) = -g(x)$. Den Graphen von f erhalten wir durch Spiegeln des Graphen von g an der x -Achse.



Die Graphen der Umkehrfunktionen erhält man, indem man die Graphen der Funktionen an der 1. Mediane (das ist die Gerade durch $(0|0)$ und $(1|1)$) spiegelt.

263 **A, D**

264 Ist eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ streng monoton wachsend (d.h. $a > 1$), dann ist auch ihre Umkehrfunktion streng monoton wachsend. Ebenso gilt, wenn eine Exponentialfunktion streng monoton fallend ist (d.h. $0 < a < 1$), dann ist auch ihre Umkehrfunktion streng monoton fallend.



Daher haben zum Beispiel die Funktionen f, g, h mit $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x, h(x) = 1,5^x$ streng monoton wachsende Umkehrfunktionen und die Funktionen a, b, c mit $a(x) = (\frac{1}{2})^x, b(x) = (\frac{1}{3})^x, c(x) = (\frac{3}{4})^x$ streng monoton fallende Umkehrfunktionen.

265 Siehe Schulbuch Seite 180.

266 Siehe Schulbuch Seite 180.

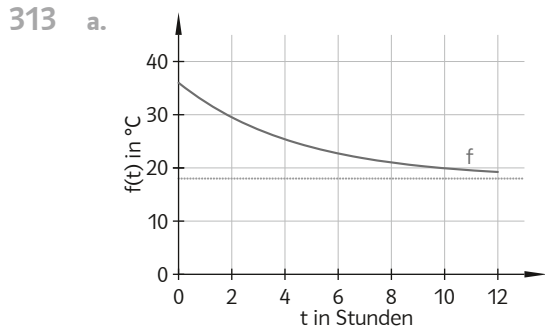
3.3 Wachstums- und Abnahmeprozesse

- 268 N mit $N(t) = 1250 \cdot t$
- 269 N mit $N(t) = 20 + 5 \cdot t$
- 270 a. N mit $N(t) = 1,5 + 0,25 \cdot t$ b. 14 Tage
- 271 a. $N(t) = 47360 + 320 \cdot t$
 b. 164160 km
 c. nach 164,5 Tagen, also im Laufe des 165. Tages dieses Jahres
- 272 a. $N(t) = 50 + \frac{5}{4} \cdot t$ b. um 11:56 Uhr c. um 10:20 Uhr
- 273 a. 1,5 cm b. h mit $h(t) = 160 - 1,5t$ c. 149,5 cm
- 274 a. 60 Stück b. N mit $N(t) = 2400 - 60t$ c. nach 8 Tagen
- 276 a. E mit $E(t) = 12 \cdot 1,025^t$
 b. nach 5 Jahren: 13,577 Mio. Einwohner/innen; nach 7,5 Jahren: 14,441 Mio. Einwohner/innen;
 nach 20 Jahren: 19,66 Mio. Einwohner/innen
 c. 11,422 Einwohner/innen
 d. $6,35 \cdot 10^{17}$ Einwohner/innen. Für diesen Zeitraum liefert das Modell kein sinnvolles Ergebnis mehr.
- 277 a. K mit $K(t) = 18000 \cdot 1,0075^t$
 b. 18 685,20 €
 c. nach 14,1 Jahren
 d. Diese Annahme ist nicht sinnvoll, da die Zinssätze schwanken, besonders für lange Zeiträume ist diese Annahme daher nicht sinnvoll.
- 278 a. B mit $B(t) = 10000 \cdot 1,5^t$
 b. in 5 Stunden: 75938 Bakterien; in 8 Stunden: 256289 Bakterien
 c. vor 3 Stunden: 2963 Bakterien
 d. in 9,65 Stunden
- 279 a. B mit $B(t) = 10000 \cdot 1,75^t$
 b. in 2 Stunden: 30625 Bakterien; in 4 Stunden: 93789 Bakterien
 c. vor 0,5 Stunden: 7559 Bakterien
- 280 a. V mit $V(t) = 1400 \cdot 1,25^t$ b. ca. 13 040 Viren c. nach ca. 28,5 Stunden
- 281 a. ca. 18 min b. ca. 133 min
- 283 a. N mit $N(t) = 0,3 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$
 b. 0,42 Mrd. €
 c. $N(14) = 1,51$ Mrd.€; Das Modell unterschätzt die tatsächliche Entwicklung.
- 284 a. $N(t) = 42 \cdot 2^{\frac{t}{90}}$
 b. 59,4 g
 c. $1,8 \cdot 10^{11}$ g; Dieses Ergebnis ist nicht realistisch, die Hefe würde, zum Beispiel wegen Nahrungsmangel, aufhören zu wachsen.
- 286 a. 1,03% b. 2118 c. 992 Mrd. Menschen
 d. Das Modell ist für lange Zeiträume nicht realistisch, da die Nahrungsmittelressourcen für zum Beispiel 992 Mrd. Menschen nicht reichen.

- 287** a. E mit $E(t) = 20 \cdot 1,1^t$
 b. am 12. Tag
 c. Am 45. Tag müsste Elias dann mehr als 24 Stunden laufen, ein Tag hat aber nur 24 Stunden.
- 288** a. f mit $f(t) = 4 \cdot 1,079^t$
 b. Bereits in knapp 3 Jahren, also 2017, sollten der Prognose entsprechend über 5 Mio. Menschen im Oman leben.
 c. In ca. 9 Jahren nach 2014, also im Jahr 2023, sollte (wenn sich die Prognosen bewahrheiten) eine Verdopplung auf 8 Mio. Menschen erfolgt sein.
- 289** a. f mit $f(t) = 2400 \cdot 1,03^t$
 b. nach 8 Jahren
 c. Die Gehälter würden sich in ca. 23 Jahren verdoppeln. Aus unternehmerischer Sicht wird die Erhöhung wohl vom wirtschaftlichen Erfolg des Betriebs abhängen und daher nicht jedes Jahr gleich sein.
- 290** –
- 291** I. a. 3 552 586 \approx 3,6 Mio. Einwohner/innen
 b. 3,48–3,63 Mio. Einwohner/innen
 c. 3,39–3,73 Mio. Einwohner/innen
 d. Wachstumsfaktor
 e. 3,31–3,80 Mio. Einwohner/innen
 f. –
- II. a. 5 258 696 \approx 5,3 Mio. Einwohner/innen
 b. 5,15–5,37 Mio. Einwohner/innen
 c. 4,78–5,79 Mio. Einwohner/innen
 d. Wachstumsfaktor
 e. 4,68–5,91 Mio. Einwohner/innen
 f. –
- 293** a. $\tau \approx 2,31$ b. $\tau \approx 64$ c. $\tau \approx 167,83$ d. $\tau \approx 9$
- 294** a. 0,00043 b. nach 2142 Jahren
- 295** a. nach 18,6 Tagen b. 7,43 % der Ausgangsmenge c. 8,3 %
- 296** a. nach 8,95 Jahren b. 63,84 % der Ausgangsmenge c. 2,46 %
- 297** ca. 159 453 Jahre
- 298** a. vor 17,6 Jahren b. bis zu 52,8 Jahre
- 299** a. ca. 14 275 Jahre b. ca. 38 335 Jahre
- 300** ca. 17 650 Jahre
- 301** ca. 40 Stunden
- 303** a. $f(t) = 100 \cdot 0,93^t$ b. 67,09 %
- 304** a. 6 cm b. 1,6 cm c. nach 113 s
- 305** a. $c = 1013$; $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5500}} = 0,999874$ b. 628 mbar c. 1068 mbar
-  **306** Die Funktion f ist auf \mathbb{R}^+ monoton wachsend, ihr Graph nähert sich der Geraden durch $(0 | K)$, die parallel zur x-Achse ist, aber erreicht sie nie. Je kleiner c und a (mit $0 < a < 1$) sind, desto schneller wächst die Funktion. Der Graph ist für kleine Argumente „steil“ und wird dann immer „flacher“.
-  **307** Je größer K ist, desto größer werden die Funktionswerte für große Argumente. Je näher a bei 1 ist, desto langsamer verläuft das Wachstum. Je größer c ist, desto niedriger ist der Anfangswert $N(0)$.
- 308** a. logistisches Wachstum b. lineares Wachstum c. lineares Wachstum
- 309** a. lineares Wachstum b. exponentielles Wachstum c. beschränktes Wachstum

- 311 a. exponentielles Wachstum c. beschränktes Wachstum
 b. logistisches Wachstum d. exponentielle Abnahme

- 312 a. beschränktes Wachstum, Kapazitätsgrenze: U_0
 b. exponentielle Abnahme
 c. beschränktes Wachstum, Kapazitätsgrenze: T_k
 d. logistisches Wachstum, Kapazitätsgrenze: K



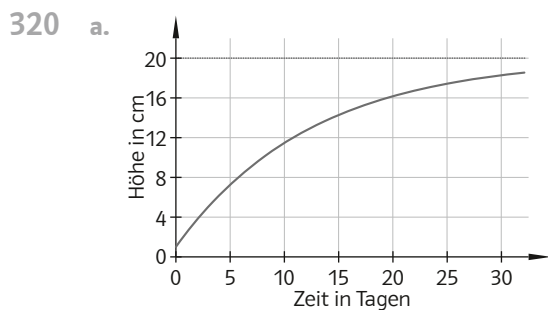
- b. 36°C
 c. 9,85 h
 d. 4,23 h

314 –

- 316 a. beschränktes Wachstum, N mit $N(t) = 600 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$
 b. logistisches Wachstum, N mit $N(t) = \frac{800}{1 + 7 \cdot 0,2^t}$
 c. logistisches Wachstum, N mit $N(t) = \frac{400}{1 + 7 \cdot 0,2^t}$
 d. beschränktes Wachstum, N mit $N(t) = 1000 \cdot (1 - 0,8 \cdot 0,6^t)$

- 318 a. N mit $N(t) = 535 \cdot \left(1 - \left(\frac{105}{107}\right)^t\right)$
 b. 231 Sticker
 c. Nach ca. 145 Tagen hätte Anda $145 \cdot 2 = 290$ Packungen um insgesamt 174 € gekauft.

- 319 a. N mit $N(t) = 420 \cdot \left(1 - \left(\frac{67}{40}\right)^t\right)$
 b. ca. 149 Sticker
 c. 70 Einkäufe
 d. Eher nicht. Bei 70 Einkäufen wären das pro Woche ca. 6 Einkäufe, Frau Müller müsste daher täglich einkaufen gehen.



- b. 11,46 cm
 c. 20 cm
 d. 8,02 Tage

- 321 a. N mit $N(t) = 100 \cdot \left(1 - \left(\frac{97}{100}\right)^t\right)$
 b. ca. 37 Überraschungen
 c. Nein, dafür müsste sie die Großmutter ca. 75-mal besuchen, was sich in einem Jahr bei einem Besuch pro Woche nicht ausgeht.

- 322 a. $K = 150$; $c = 1$; $a = 0,82$; $N(t) = 150 \cdot (1 - 0,82^t)$
 b. 50 Zeitschriften
 c. 386 €
 d. 10,6 Tage
 e. Man berechnet die Differenz der Zeitschriften, die er bis zum n -ten Tag verkauft hat und den Zeitschriften, die er bis zum Tag davor verkauft hat, also $N(n) - N(n-1)$.

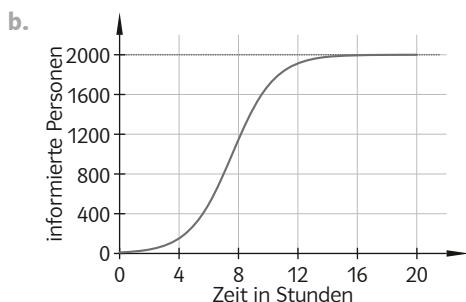
- 324 a. Da die Anzahl der Fische am Anfang exponentiell wächst, aber es eine Kapazitätsgrenze gibt, ist das Wachstum voraussichtlich logistisch.

b.
$$N(t) = \frac{2000}{1 + 9 \cdot \left(\frac{179}{189}\right)^t}$$

- c. 321 Fische

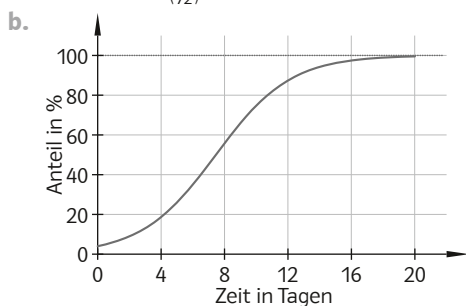
- 325 a. $N(t) = \frac{1400}{1 + 16,5 \cdot \left(\frac{328}{363}\right)^t}$ b. ca. 281 Einwohner/innen c. ca. 28 Tage

326 a. $f(t) = \frac{2000}{1 + 199 \cdot 0,4975^t}$



- c. 283 Personen
 d. ca. 7,5 Stunden
 e. alle Personen
 f. Zum Beispiel, dass sich Nachrichten zwischen verschiedenen Gruppen der Schulgemeinschaft (Lehrpersonen, Klassen ...) ebenso verbreiten wie innerhalb dieser Gruppen. Oder, dass sich das Gerücht in den Nachtstunden ebenso rasch verbreitet wie am Tag.

327 a. $f(t) = \frac{100}{1 + 24 \cdot \left(\frac{47}{72}\right)^t}$

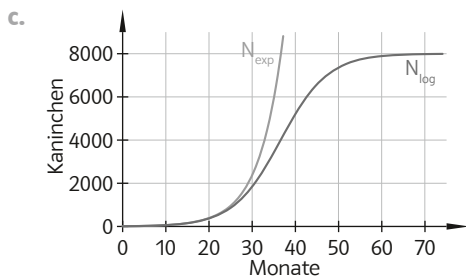


- c. 18,66 %
 d. nach ca. 7,45 Tagen

- e. nach ca. 20 Tagen
- f. Nein, weil es vermutlich bald ein aktives Virenschutzprogramm dagegen gibt.

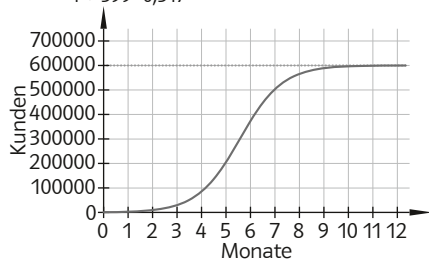
328 a. $N_{\text{exp}}(t) = 10 \cdot 1,2^t$

b. $N_{\text{log}}(t) = \frac{8000}{1 + 799 \cdot \left(\frac{1997}{2397}\right)^t}$



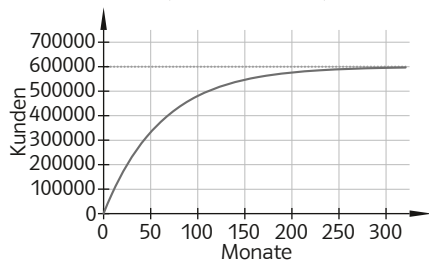
nach ca. 30 Monaten

329 a. $f(t) = \frac{600000}{1 + 599 \cdot 0,317^t}$



600 000 werden nie erreicht, aber nach 10 Monaten sind es bereits 596 340 Kund/innen.

b. $f(t) = 600000 \cdot \left(1 - \frac{599}{600} \cdot 0,984^t\right)$



600 000 werden nie erreicht, aber nach 250 Monaten sind es bereits 589 378 Kund/innen.

330 Siehe Schulbuch Seite 181.

331 Siehe Schulbuch Seite 181.

332 Siehe Schulbuch Seite 181.

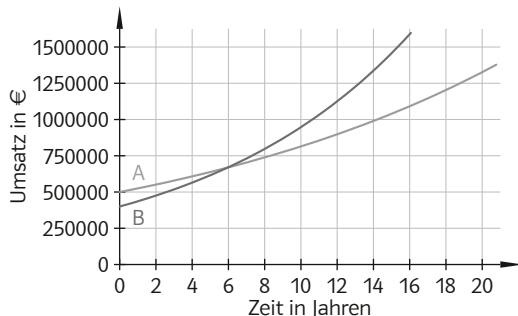
333 Siehe Schulbuch Seite 181.

334 Siehe Schulbuch Seite 181.

Zusammenfassende Aufgaben

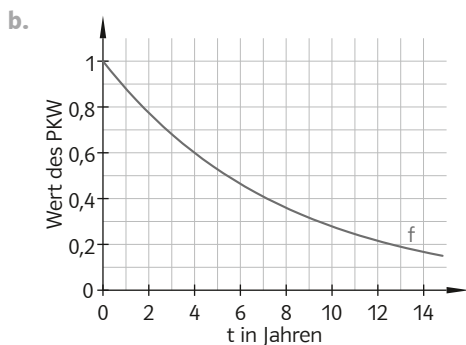
- 335 a. $6,87 \cdot 10^{10}$ Bakterien
 b. ca. 13 Stunden und 17 Minuten

- 336 a. A mit $A(t) = 500\,000 \cdot 1,05^t$ und B mit $B(t) = 400\,000 \cdot 1,09^t$
 b.



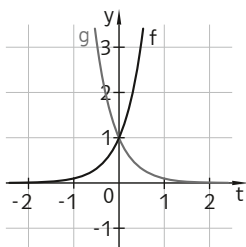
- c. ca. nach 6 Jahren
 d. nach genau 5,97 Jahren
 e. Nein, weil das Umsatzwachstum der beiden Firmen eine Kapazitätsgrenze hat.

- 337 a. f mit $f(t) = 0,88^t$ (Nennwert des Wagens: 1)



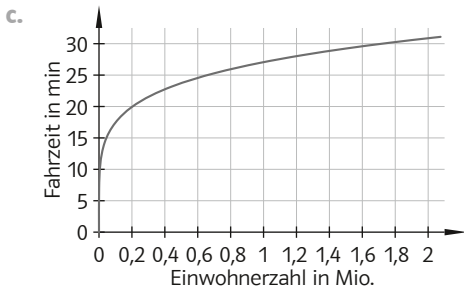
- c. 5,4 Jahre
 d. 27,85%

- 338



Den Graphen von g erhält man, indem man den von f an der y-Achse spiegelt.
 Der Graph von f ist monoton wachsend, der von g monoton fallend.

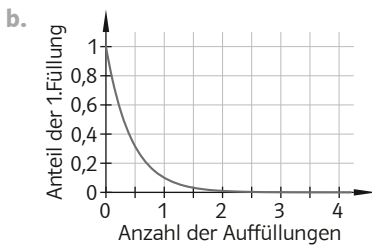
- 339 a. 27 min
 b. zum Beispiel für Graz (260 000 Einwohner/innen): 21 min



- 340 a. $a = 0,5882$; $c = 319\,999$ b. 21 Tage
 341 a. ca. 0,79% b. 581,3 Tage

- 342 **B**, **C**
A ist falsch, ein Gegenbeispiel ist $0,5^{-1} = 2 > 1$.
B ist richtig. Für $a > 1$ ist a^t streng monoton wachsend. Für $t = 0$ ist $a^t = 1$, daher muss für $t < 0$ auch $a^t < 1$ sein.
C ist richtig, denn es ist $a^t = a^{s+(t-s)} = a^s a^{t-s}$. Wenn $s < t$ ist, ist $t-s > 0$, also $\exp_a(s) = a^s < a^t = \exp_a(t)$, wenn $a > 1$ ist.
D ist falsch, denn **C** und **D** können nicht beide gleichzeitig richtig sein.

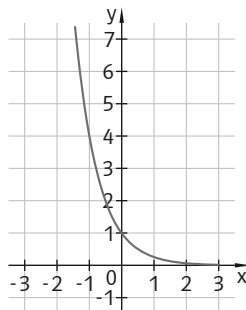
- 343 a. R mit $R(t) = 0,1^t = 10^{-t}$ (R(t) ... Restmenge der Erstfüllung nach t Füllungen in Prozent)



- c. fast nichts mehr, $10^{-8}\% = 10^{-10}$
 d. nach 3 Füllungen

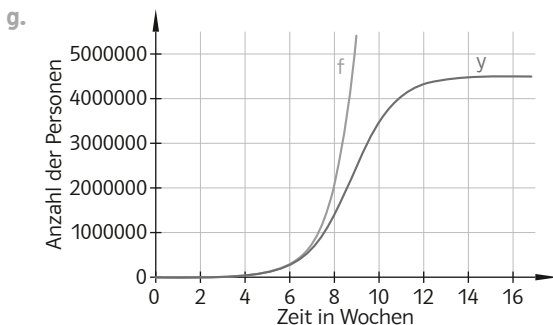
344

x	$(\frac{1}{4})^x$
-3	64,000
-2	16,000
-1	4,000
0	1,000
1	0,250
2	0,063
3	0,016



- 345 a. 918 018,40 € b. nach 6,5 Jahren
 346 a. 0,93 g b. ca. 38 Tage c. um 16,7%

- 347 a. $f(t) = 700 \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^t$
- b. ca. 5,6 Millionen Personen ($f(9) = 5\,597\,551$)
- c. ca. 8 Wochen und 2 Tage ($t = 7,275$)
- d. $y(t) = \frac{4\,500\,000}{1 + 6427,57 \cdot 0,3683^t}$
- e. 2,5 Millionen Personen ($y(9) = 2\,498\,024$)
- f. ca. 12 Wochen ($t = 10,98$)



ab der 8. Woche

Was habe ich in diesem Semester gelernt? – 5. Semester

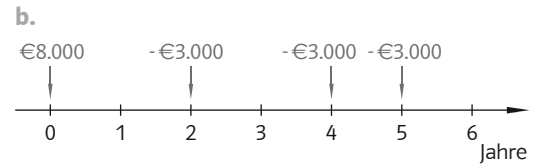
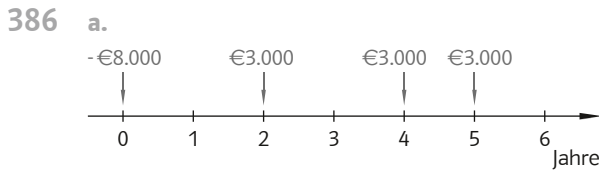
Die Lösungen zu den Aufgaben 348–381 sind im Schulbuch auf den Seiten 181–182 zu finden.

4 Rentenrechnung und Schuldtilgung

4.1 Zahlungsströme

383 a. Freitag b. Samstag c. 186 €

384 a. im 5., 7. und 12. Monat b. 21,56 €

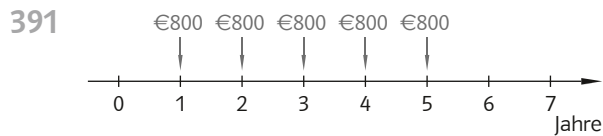


387 a. Sicht des Kreditnehmers

b. Sicht der Bank

389 a. 10 357,10 € b. 10 069,69 €

390 a. 10 602,27 € b. 10 289,77 €



a. 4 246,39 € b. 4 183,58 €

393 1955,03 €

394 a. Barwert: 2 245,84 €; Endwert: 2 654,50 € b. Man erhält den Endwert.

395 Siehe Schulbuch Seite 183.

396 Siehe Schulbuch Seite 183.

397 Siehe Schulbuch Seite 183.

4.2 Grundlagen der Rentenrechnung

399 a. 12,58 b. 20,16 c. 19,03 d. 6,73

400 a. 12,49 b. 14,14 c. 19,43 d. 7,15

401 a. B b. C

402 29 001,66 €

403 a. Zunächst wird 5000 herausgehoben und man erhält

$$E = 5000 \cdot (1,01^6 + 1,01^5 + \dots + 1,01^2 + 1,01 + 1).$$

Wir bezeichnen die Summe in der Klammer mit s_7 , also $s_7 = 1,01^6 + 1,01^5 + \dots + 1,01^2 + 1,01 + 1$.

$$s_7 \cdot 1,01 = 1,01^7 + 1,01^6 + \dots + 1,01^2 + 1,01$$

$$s_7 \cdot 1,01 - s_7 = (1,01^7 + 1,01^6 + \dots + 1,01^2 + 1,01) - (1,01^6 + 1,01^5 + \dots + 1,01^2 + 1,01 + 1) = 1,01^7 - 1$$

$$s_7 \cdot (1,01 - 1) = 1,01^7 - 1 \quad | : (1,01 - 1)$$

$$s_7 = \frac{1,01^7 - 1}{1,01 - 1}$$

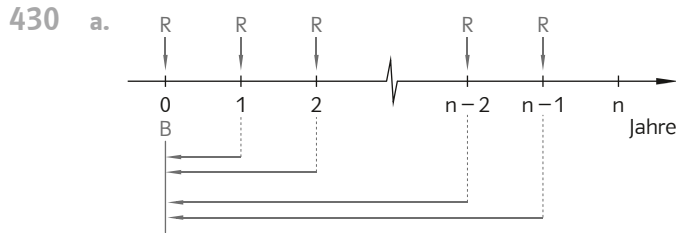
Also ist

$$E = 5000 \cdot s_7 = 5000 \cdot \frac{1,01^7 - 1}{1,01 - 1}.$$

b. 36 067,67 €

- 404** a. 18 446 744 073 709 551 615 = 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen 551 Tausend 615
 b. $184\,467\,440\,737\text{m}^3 \approx 184,467\text{km}^3$
 c. $5\,692,5\text{m} \approx 5,7\text{km}$
 d. –
- 405** a. keine Jahresrente, da die Zahlungen nicht gleich hoch sind
 b. Jahresrente mit 10 Jahren Laufzeit und Rate 100 €
 c. keine Jahresrente, da die Zahlungen nicht jedes Jahr stattfinden
 d. Jahresrente mit 5 Jahren Laufzeit und Rate 2000 €
- 407** Endwert: 9887,14 €; Barwert: 7927,61 €
- 408** 31371,42 €
- 409** Endwert: 22707,24 €; Barwert: 15926,41 €
- 410** a. 4301,33 € b. 18351,36 € c. 17783,11 € d. 4716,25 €
- 411** a. 44069,19 € b. 35471,57 € c. 5672,90 €
- 412** a. 41645,47 € b. 39290,76 €
- 414** 16103,37 €
- 415** a. 117094,74 € b. 83506,77 € c. 341966,89 € d. 532833,70 €
- 416** 86503,87 €
- 417** 18997,79 €
- 418** a. 8008,74 € b. 12518,13 € c. 5129,16 € d. 4880,41 €
- 419** a. Endwert: 383137,62 €; Barwert: 245921,46 €
 b. Endwert: 493450,56 €; Barwert: 205899,68 €
 Der kleinere Zinssatz führt zum höheren Barwert, der größere Zinssatz zum höheren Endwert.
- 420** Da die Zahlungen jeweils am Jahresbeginn erfolgen, liegt jede der vorschüssigen Raten ein Jahr länger auf dem Konto als die entsprechende nachschüssige Rate.
- 421** Da für die vorschüssige Rente $E_{\text{vor}} = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ist und für die nachschüssige Rente $E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ist, ist $E_{\text{nach}} = \frac{E_{\text{vor}}}{q}$. Der Endwert der vorschüssigen Rente muss durch den Aufzinsungsfaktor dividiert werden, um den Endwert der nachschüssigen Rente zu erhalten.
- 422** 1680,05 €
- 423** 3630,33 €
- 424** a. 66168,07 € b. 60849,82 €
- 425** a. 15 Jahre, 6 Monate und 11 Tage b. 14 Jahre, 6 Monate und 17 Tage
- 426** a. 1775,26 € b. 1846,27 €
- 427** 2,61%
- 428** 28504,99 €
- 429** a. 80er Jahre: 13206,78 €; 2015: 10476,00 € b. um 20,68 %

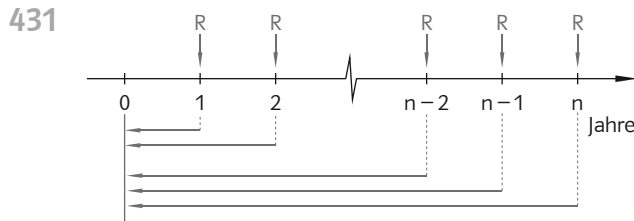




b.
$$B = R + R \cdot q^{-1} + R \cdot q^{-2} + \dots + R \cdot q^{-(n-2)} + R \cdot q^{-(n-1)} =$$

$$= R + R \cdot (q^{-1}) + R \cdot (q^{-1})^2 + \dots + R \cdot (q^{-1})^{n-2} + R \cdot (q^{-1})^{n-1} =$$

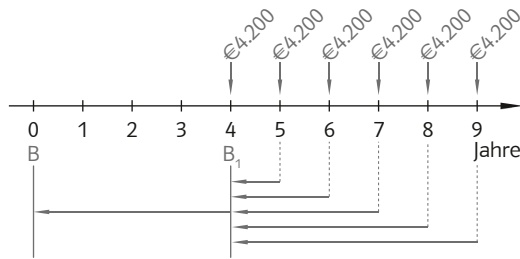
$$= R + R \cdot v + R \cdot v^2 + \dots + R \cdot v^{n-2} + R \cdot v^{n-1} = R \cdot (1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}) = R \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}$$



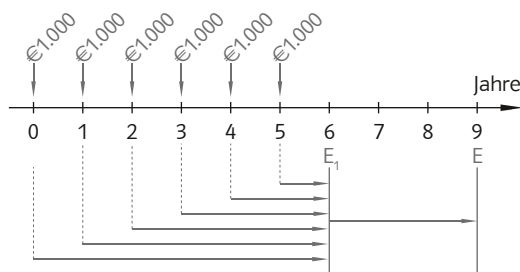
$$B = R \cdot q^{-1} + R \cdot q^{-2} + \dots + R \cdot q^{-(n-1)} + R \cdot q^{-n} = R \cdot (q^{-1}) + R \cdot (q^{-1})^2 + \dots + R \cdot (q^{-1})^{n-1} + R \cdot (q^{-1})^n =$$

$$= R \cdot v + R \cdot v^2 + \dots + R \cdot v^{n-1} + R \cdot v^n = R \cdot v \cdot (1 + v + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}) = R \cdot v \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

433 $B = 22\,611,99 \text{ €}$



434 $E = 6\,453,73 \text{ €}$



- 437 a. Endwert: 51400,14 €; Barwert: 34540,08 €
 b. Endwert: 100104,66 €; Barwert: 52202,39 €
 c. Endwert: 16202,08 €; Barwert: 13947,87 €
- 438 a. Endwert: 21959,06 €; Barwert: 13715,57 €
 b. Endwert: 22543,73 €; Barwert: 19625,68 €
 c. Endwert: 116079,58 €; Barwert: 58337,64 €
- 439 a. Endwert: 6418,70 €; Barwert: 5604,52 €
 b. Endwert: 10589,46 €; Barwert: 8856,89 €
 c. Endwert: 27931,03 €; Barwert: 24067,26 €

- 440 a. Endwert: 101533,40 €; Barwert: 79196,92 €
 b. Endwert: 47492,79 €; Barwert: 39695,97 €
 c. Endwert: 17013,91 €; Barwert: 14792,69 €

441 D

442 E

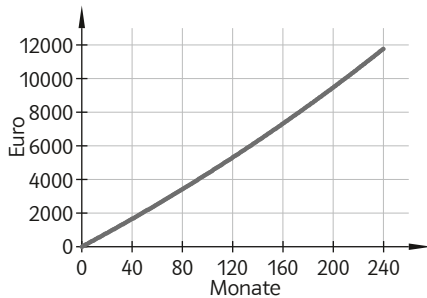
443 8475,51 €

444 a. 3812,16 € b. 6597,81 €

- 445 a. 558,70 €
 b. Die 2000 €, die Gregor schon heute besitzt, bringen ihm in den nächsten 2 Jahren ebenfalls Zinsen ein. Daher ist zunächst der Endwert dieser 2000 € zu bestimmen. Der Betrag, der dann noch auf die 14000 € fehlt, ist durch 24 vorschüssige Monatsraten anzusparen. Die Höhe dieser Raten ist 472,04 €.

446 127385,16 €

447 Die Präsentation könnte unter anderem folgende Grafik enthalten:



448 a. 406,57 € b. 1224,48 €

449 5990,81 €

450 57,81 €

- 451 a. 101,79 €
 b. Da der monatliche Zinssatz etwas geringer ausfällt, wenn der gegebene Zinssatz der Effektivzinssatz ist, müssen die Raten im Gegenzug etwas höher sein, um auf denselben Endwert zu kommen. In diesem Fall wären die Monatsraten um 0,01 € höher.

- 452 a. 137,65 €
 b. 139,25 €. Georg müsste ohne Zinsen monatlich um 1,60 € mehr zahlen. Er erhält von der Bank in diesem Zeitraum daher insgesamt $12 \cdot 1,60 \text{ €} = 57,60 \text{ €}$ Zinsen.

454 Den maximalen Endwert, den Martin erzielen kann, erreicht er bei einem Zinssatz von $2,5\% \cdot 0,75 = 1,875\%$ p.a. nach KEST. Er beträgt 3141,30 €. Den minimalen Endwert erzielt er bei einem Zinssatz von $0,5\% \cdot 0,75 = 0,375\%$ p.a. nach KEST. Er beträgt 3027,77 €. Daher kann Martin damit rechnen, einen Endwert zwischen 3027,77 € und 3141,30 € zu erhalten.

456 65868,95 €

457 6824,57 €

458 Valentina wollte herausfinden, wie lange sie von ihrem angelegten Geld monatlich vorschüssig einen Betrag von 4 000 € beziehen kann. Die KEST von 25 % hat sie dabei berücksichtigt. Da n in diesem Zusammenhang der Anzahl der Monate entspricht, erhält sie nach Division durch 12 die Anzahl der Jahre. Sie kann daher 35 Jahre lang von diesem Geld monatlich vorschüssig 4 000 € abheben.

460 a. 41 889,49 € b. 4 952,61 €

461 I. a. 4 458,48 € b. 79,37 € II. a. 4 340,35 € b. 76,02 €

462 85 302,03 €
Der Barwert einer 10jährigen nachschüssigen Jahresrente von 10 000 € bei 3 % p.a. beträgt 85 302,03 €. Um diese Rente beziehen zu können, müssen also zu Beginn mindestens 85 302,03 € angelegt werden.

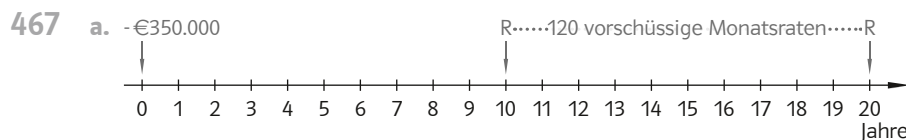


ggb/xls/tns
6zs4q5

463 a. 11 954,75 € b. 12 950,46 €

465 2 179,33 €

466 613,89 €



b. 3 987,37 €

468 290,76 €

470 1 380,09 €

471 a. 6 355,13 € b. 3 150,00 € c. 1 568,17 € d. 521,21 €

472 a. 6 160,46 € b. 3 083,40 €

473 302 233,37 €

474 2 225,02 €

475 a. 346 599,01 € b. 224 204,21 € c. Für die ewige Rente sind um 122 394,80 € mehr erforderlich.

477 a. 2 486,76 € c. 4 388,95 € e. 6 124,95 €
b. 960,86 € d. 896,57 €

478 37 525,31 €

479 a. 175,84 € b. 3 992,96 €

480 a. 1465,50 €

b. Die Berechnung der nachschüssigen Rate unterscheidet sich von der Berechnung der vorschüssigen Rate nur dadurch, dass $K_0 \cdot q^n$ durch $\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$ dividiert wird und nicht durch $\left(q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$.

Die nachschüssige Rate ist demnach um den Faktor $q = \sqrt[4]{1,0215^2} \approx 1,01069$ ist, ist die nachschüssige Rate um 1,069 % höher. Diesen Prozentsatz würde man auch erhalten, wenn man die nachschüssige Rate direkt berechnet und anschließend mit der vorschüssigen Rate vergleicht.

482 ca. 16 Jahre (191,55 Monate)

483 40 Raten

484 Nein, allein die Zinsen für den ersten Monat betragen 1222,23 € und sind somit größer als die Rate. Die Schulden werden immer größer.

485 Nein, denn die Zinsen im ersten Monat betragen bereits 1052,33 €.

$$\begin{aligned}
 486 \quad R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} &= K_0 \cdot q^n && | \cdot (q - 1) \\
 R \cdot (q^n - 1) &= K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1) \\
 R \cdot q^n - R &= K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1) && | + R - K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1) \\
 R \cdot q^n - K_0 \cdot q^n \cdot (q - 1) &= R && | q^n \text{ herausheben} \\
 q^n \cdot (R - K_0 \cdot (q - 1)) &= R && | : (R - K_0 \cdot (q - 1)) \\
 q^n &= \frac{R}{R - K_0 \cdot (q - 1)} && | \ln \\
 n \cdot \ln(q) &= \ln\left(\frac{R}{R - K_0 \cdot (q - 1)}\right) && | : \ln(q) \\
 n &= \ln\left(\frac{R}{R - K_0 \cdot (q - 1)}\right) : \ln(q)
 \end{aligned}$$

488 a. 91 Vollraten b. 286,19 € c. 287,92 €

489 a. 81 Vollraten b. 18,36 € c. 18,45 €

490 124 Vollraten; Teilrate: 873,62 €

491 32 Vollraten; Teilrate: 3 869,96

492 a. 23-mal b. 820,77 €

494 a. 137 Vollraten b. 75,07 € c. 75,44 €

495 a. 118 Vollraten b. 761,09 € c. 765,99 €

496 a. 54 Jahre und 8 Monate; Teilrate: 829,55 € b. 2 483,04 €

497 308 Vollraten; Teilrate: 177,59 €

498 167 Vollraten; Teilrate: 597,08 €

499 Siehe Schulbuch Seite 183.

500 Siehe Schulbuch Seite 183.

501 Siehe Schulbuch Seite 183.

502 Siehe Schulbuch Seite 183.

503 Siehe Schulbuch Seite 183.

504 Siehe Schulbuch Seite 183.

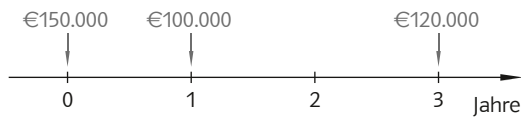
505 Siehe Schulbuch Seite 183.

506 Siehe Schulbuch Seite 183.

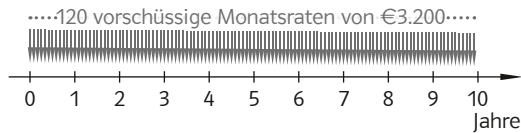
4.3 Vergleich von Zahlungen

508 136 652,66 €

509 a. Angebot I:



Angebot II:



b. $B_I = 363\,280,21\text{€}$; $B_{II} = 357\,002,66\text{€}$; Angebot I ist aus Sicht des Landwirts besser.

510 Angebot I [Angebot I: 148 288,97€; Angebot II: 147 508,00€]

Aus Sicht der Verkäuferin ist das Angebot mit dem höheren Barwert besser. Da der Barwert von Angebot I 148 288,97€ und der Barwert von Angebot II nur 147 508,00€ beträgt, ist Angebot I besser.

511 40 823,70 €

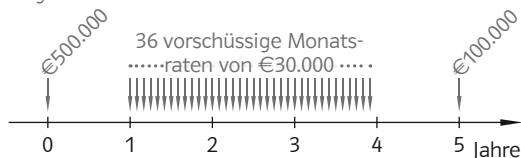
512 2 335,97 €

513 a. Der Barwert des Angebots von Händler 2 ist mit 73 064,21€ kleiner als der des Angebotes von Händler 1 mit 73 448,60€. Somit sollte Frau Hurtig den Sportwagen bei Händler 2 kaufen.

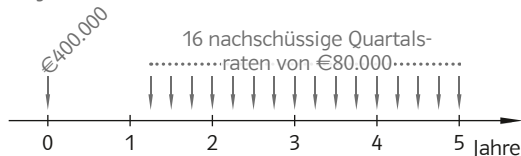
b. Beispielsweise ist bei einem Zinssatz von 4% p.a. der Barwert des Angebots von Händler 1 kleiner, also dessen Angebot besser.

514 Angebot B [Angebot A: 25 974,85€; Angebot B: 26 049,51€]

515 a. Angebot A:



Angebot B:



b. Angebot A [Angebot A: 1414 081,93€; Angebot B: 1349 553,56€]

516 a. Herrn Antensteiners Angebot ist das beste, denn der Barwert seines Angebots ist mit 18,97 Mio. € am größten, gefolgt von Herrn Chagaris mit 18,21 Mio. € und Herrn Bärntalers mit 15,82 Mio. €.

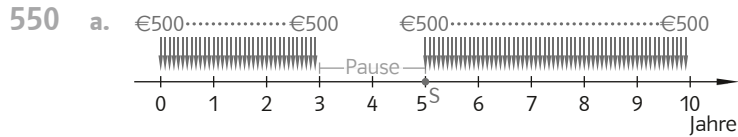
b. Ja, Herrn Chagaris Angebot ist nun das beste Angebot, denn der Barwert seines Angebots ist mit 16,12 Mio. € am größten, gefolgt von Herrn Antensteiners mit 15,72 Mio. € und Herrn Bärntalers mit 13,71 Mio. €.

518 1 123,99 €

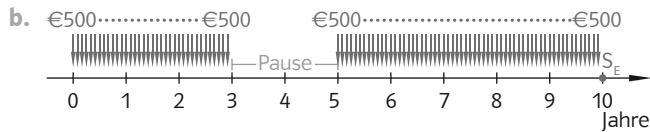
519 1 164,68 €

548 Siehe Schulbuch Seite 183.

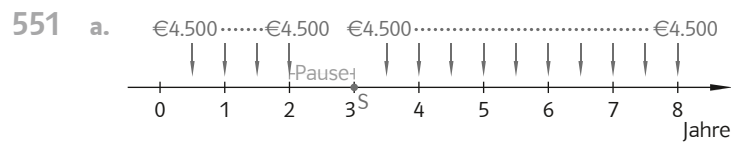
4.4 Rentenkonvertierung



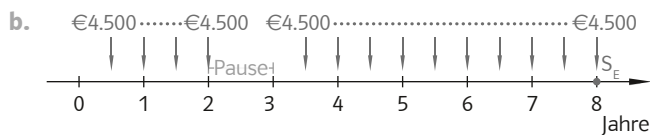
12345,45 €



14138,92 €



9072,54 € am Ende des 3. Jahres



10645,82 €

553 a. 440,93 € b. 533,44 €

554 a. 1317,33 € b. 1553,50 €

555 a. 12785,37 € b. I. 2432,37 € II. 2555,50 € III. 103,77 €

556 a. 13979,19 € b. I. 1219,41 € II. 1499,72 € III. 16,05 €

557 a. 15593,99 € b. I. 3813,69 € II. 4839,51 € III. 89,51 €

558 a. 786,82 € b. 3000,29 €

559 a. 41853,57 € b. auf 71655,41 €

561 a. 1200519,45 € b. 1008202,14 €

562 a. 57303,85 € b. 46840,92 €

563 a. 935,12 € b. 833,67 €

565 a. 1607,08 € b. um 20 Monate

566 a. 1274,07 €
 b. Wenn die Teilrate erst einen Monat nach der letzten Vollrate gezahlt wird, verzögert sich die Rückzahlung um 20 Monate.

567 a. 11715,48 € b. um 2,5 Jahre; 6430,98 €

568 a. 505,45 € b. um 15 Monate

- 569 a. 1022,29 € b. um 10 Monate c. 166,92 €
- 570 a. 2744,65 € c. 2347,46 €
 b. 236408,50 € d. I. 121 Vollraten II. 2673,52 € III. um 2 Jahre und 10 Monate
- 572 a. 1261,09 € b. 14 Vollraten, 2716,64 €
- 573 a. 959,52 € b. um 61 Monate
- 574 a. 1611,86 € b. 80 Vollraten c. 452,51 € d. um 27 Monate
- 575 a. 1069,20 € b. 95 Vollraten, Teilrate gemeinsam mit letzter Vollrate: 239,32 €
- 576 Siehe Schulbuch Seite 183.
- 577 Siehe Schulbuch Seite 183.
- 578 Siehe Schulbuch Seite 184.
- 579 Siehe Schulbuch Seite 184.
- 580 Siehe Schulbuch Seite 184.

4.5 Tilgungspläne

581 –

583

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				80 000,00 €
1	5 000,00 €	8 010,64 €	13 010,64 €	71 989,36 €
2	4 499,34 €	8 511,31 €	13 010,64 €	63 478,06 €
3	3 967,38 €	9 043,26 €	13 010,64 €	54 434,79 €
4	3 402,17 €	9 608,47 €	13 010,64 €	44 826,33 €
5	2 801,65 €	10 208,99 €	13 010,64 €	34 617,33 €
6	2 163,58 €	10 847,06 €	13 010,64 €	23 770,28 €
7	1 485,64 €	11 525,00 €	13 010,64 €	12 245,28 €
8	765,33 €	12 245,31 € 12 245,28 €	13 010,64 €	-0,03 € 0,00 €

584 a. 12 031,73 €

b.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0,00 €	0,00 €	0,00 €	50 000,00 €
1	3 250,00 €	8 781,73 €	12 031,73 €	41 218,27 €
...
4	1 423,84 €	10 607,89 €	12 031,73 €	11 297,38 €
5	734,33 €	11 297,38 €	12 031,71 €	0,00 €

585 a. 4195,91 €

b.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0,00 €	0,00 €	0,00 €	20 000,00 €
1	1 400,00 €	2 795,91 €	4 195,91 €	17 204,09 €
...
5	531,04 €	3 664,87 €	4 195,91 €	3 921,45 €
6	274,50 €	3 921,45 €	4 195,95 €	0,00 €

586

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				10 000,00 €
1	400,00 €	1 846,27 €	2 246,27 €	8 153,73 €
2	326,15 €	1 920,12 €	2 246,27 €	6 233,61 €
3	249,34 €	1 996,93 €	2 246,27 €	4 236,68 €
4	169,47 €	2 076,80 €	2 246,27 €	2 159,88 €
5	86,40 €	2 159,88 €	2 246,28 €	0,00 €

588

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
6	4 868,07 €	24 405,86 €	29 273,93 €	53 483,19 €
7	3 342,70 €	25 931,23 €	29 273,93 €	27 551,96 €

589 Hinweis: Zunächst berechnen wir den Zinssatz wie folgt:

Die Restschuld im 7. Jahr war um den Tilgungsanteil von 12 643,40 € größer als die Restschuld von 61 530,41 € im 8. Jahr, also $61\,530,41\text{ €} + 12\,643,40\text{ €} = 74\,173,81\text{ €}$. Da der Zinsanteil 5 933,90 €

beträgt, ergibt sich der Zinssatz $i = \frac{5\,933,90}{74\,173,81} = 8\%$.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
9	4 922,43 €	13 654,86 €	18 577,30 €	47 875,54 €

590

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
20	1 133,57 €	20 610,38 €	21 743,95 €	0,00 €

593

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				50 000,00 €
1	3 250,00 €	5 000,00 €	8 250,00 €	45 000,00 €
2	2 925,00 €	5 000,00 €	7 925,00 €	40 000,00 €
3	2 600,00 €	5 000,00 €	7 600,00 €	35 000,00 €
4	2 275,00 €	5 000,00 €	7 275,00 €	30 000,00 €
5	1 950,00 €	5 000,00 €	6 950,00 €	25 000,00 €
6	1 625,00 €	5 000,00 €	6 625,00 €	20 000,00 €
7	1 300,00 €	5 000,00 €	6 300,00 €	15 000,00 €
8	975,00 €	5 000,00 €	5 975,00 €	10 000,00 €
9	650,00 €	5 000,00 €	5 650,00 €	5 000,00 €
10	325,00 €	5 000,00 €	5 325,00 €	0,00 €

594

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				150 000,00 €
1	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
2	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
3	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
4	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
5	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
6	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
7	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
8	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
9	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
10	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
11	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
12	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
13	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
14	9 375,00 €	0,00 €	9 375,00 €	150 000,00 €
15	9 375,00 €	150 000,00 €	159 375,00 €	0,00 €

595 a.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				10 000,00 €
1	575,00 €	0,00 €	575,00 €	10 000,00 €
2	575,00 €	0,00 €	575,00 €	10 000,00 €
3	575,00 €	0,00 €	575,00 €	10 000,00 €
4	575,00 €	0,00 €	575,00 €	10 000,00 €
5	575,00 €	10 000,00 €	10 575,00 €	0,00 €

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				10 000,00 €
1	575,00 €	2 000,00 €	2 575,00 €	8 000,00 €
2	460,00 €	2 000,00 €	2 460,00 €	6 000,00 €
3	345,00 €	2 000,00 €	2 345,00 €	4 000,00 €
4	230,00 €	2 000,00 €	2 230,00 €	2 000,00 €
5	115,00 €	2 000,00 €	2 115,00 €	0,00 €

b. Die Zinsschuld ist immer teurer als eine Ratenschuld, da für das ganze Kapital über die gesamte Laufzeit Zinsen berechnet werden.

596 a. Annuitätenschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				50 000,00 €
1	3 000,00 €	8 869,82 €	11 869,82 €	41 130,18 €
2	2 467,81 €	9 402,01 €	11 869,82 €	31 728,17 €
3	1 903,69 €	9 966,13 €	11 869,82 €	21 762,04 €
4	1 305,72 €	10 564,10 €	11 869,82 €	11 197,94 €
5	671,88 €	11 197,94 €	11 869,82 €	0,00 €

b. Zinsschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				50 000,00 €
1	3 000,00 €	0,00 €	3 000,00 €	50 000,00 €
2	3 000,00 €	0,00 €	3 000,00 €	50 000,00 €
3	3 000,00 €	0,00 €	3 000,00 €	50 000,00 €
4	3 000,00 €	0,00 €	3 000,00 €	50 000,00 €
5	3 000,00 €	50 000,00 €	53 000,00 €	0,00 €

c. Ratenschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				50 000,00 €
1	3 000,00 €	10 000,00 €	13 000,00 €	40 000,00 €
2	2 400,00 €	10 000,00 €	12 400,00 €	30 000,00 €
3	1 800,00 €	10 000,00 €	11 800,00 €	20 000,00 €
4	1 200,00 €	10 000,00 €	11 200,00 €	10 000,00 €
5	600,00 €	10 000,00 €	10 600,00 €	0,00 €

597 a. Annuitätenschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				300 000,00 €
1	22 500,00 €	21 205,78 €	43 705,78 €	278 794,22 €
2	20 909,57 €	22 796,21 €	43 705,78 €	255 998,01 €
3	19 199,85 €	24 505,93 €	43 705,78 €	231 492,08 €
4	17 361,91 €	26 343,87 €	43 705,78 €	205 148,20 €
5	15 386,12 €	28 319,66 €	43 705,78 €	176 828,54 €
6	13 262,14 €	30 443,64 €	43 705,78 €	146 384,90 €
7	10 978,87 €	32 726,91 €	43 705,78 €	113 657,99 €
8	8 524,35 €	35 181,43 €	43 705,78 €	78 476,55 €
9	5 885,74 €	37 820,04 €	43 705,78 €	40 656,52 €
10	3 049,24 €	40 656,54 €	43 705,78 €	-0,03 €

b. Zinsschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				300 000,00 €
1	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
2	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
3	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
4	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
5	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
6	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
7	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
8	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
9	22 500,00 €		22 500,00 €	300 000,00 €
10	22 500,00 €		322 500,00 €	–

c. Ratenschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				300 000,00 €
1	22 500,00 €	30 000,00 €	52 500,00 €	270 000,00 €
2	20 250,00 €	30 000,00 €	50 250,00 €	240 000,00 €
3	18 000,00 €	30 000,00 €	48 000,00 €	210 000,00 €
4	15 750,00 €	30 000,00 €	45 750,00 €	180 000,00 €
5	13 500,00 €	30 000,00 €	43 500,00 €	150 000,00 €
6	11 250,00 €	30 000,00 €	41 250,00 €	120 000,00 €
7	9 000,00 €	30 000,00 €	39 000,00 €	90 000,00 €
8	6 750,00 €	30 000,00 €	36 750,00 €	60 000,00 €
9	4 500,00 €	30 000,00 €	34 500,00 €	30 000,00 €
10	2 250,00 €	30 000,00 €	32 250,00 €	–

- 598 a. Es handelt sich um eine Ratenschuld, da der Tilgungsanteil gleich bleibt.
 b. 6,5% p.a.
 c. 8 Jahre, da die Restschuld jährlich um 6 000 € reduziert wird und $48\,000\text{ €} : 6\,000\text{ €} = 8$ ist.
- 599 Siehe Schulbuch Seite 184.
- 600 Siehe Schulbuch Seite 184.

Zusammenfassende Aufgaben

- 601 a. $B_1 = 171\,028,74\text{ €}$, $B_2 = 179\,719,24\text{ €}$, $B_3 = 175\,270,16\text{ €}$
 Das zweite Angebot ist bei 4% p.a. das beste, da es den höchsten Barwert bietet.
 b. $B_1 = 163\,162,01\text{ €}$, $B_2 = 159\,295,60\text{ €}$, $B_3 = 155\,282,90\text{ €}$
 Das erste Angebot ist bei 8% p.a. das beste, da es den höchsten Barwert bietet.

- 602 a. 836,92 € b. 2 680,26 €

- 603 46437,99 €



ggb/tns
j18583

- 604 3,387% p.a.

605

	p.a.	p.s.	p.q.	p.m.
a.	5,5%	2,71%	1,35%	0,45%
b.	6,09%	3%	1,49%	0,49%
c.	5,09%	2,52%	1,25%	0,41%
d.	4,91%	2,42%	1,20%	0,4%

- 606 5,224% p.a.

- 607 Variante 50–50. Sie ist mit einem Barwert von 2 097,73 € sogar billiger als der Sofortkaufpreis.
 Variante 25–75 ist mit einem Barwert von 2 121,43 € am teuersten.

- 608 a. 1242,54 € b. 1307,84 €

- 609 a. Herrn Chaplins, da der Barwert seines Angebots am größten ist.
 b. Ja, Herr Arent hat nun das beste Angebot.

- 610 a. 22 Jahre und 9 Monate; 285,92 €
 b. 122736,33 €
 c. 959,69 €

611 254 402,24 €

612 2 097,96 €

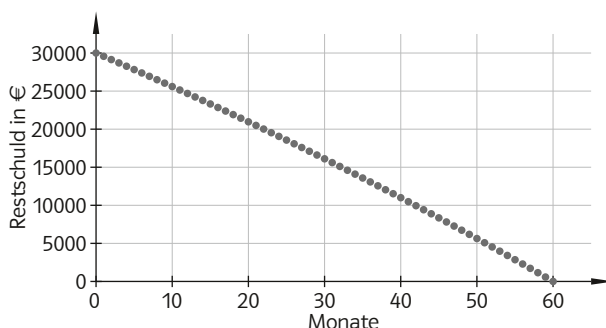
Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	–	–	–	10 000,00 €
1	700,00 €	1 397,96 €	2 097,96 €	8 602,04 €
2	602,14 €	1 495,82 €	2 097,96 €	7 106,22 €
...				...
5	265,52 €	1 832,44 €	2 097,96 €	1 960,69 €
6	137,25 €	1 960,71 €	2 097,96 €	–0,02 €
		1 960,69 €	2 097,94 €	0,00 €



ggb/xls/tns 613
xm8qn7

a. 578,96 €

b.



nach ca. 32 Monaten

614 a. 733,67 €

b. um 5 Jahre und 11 Monate; Teilrate: 639,20 €

615 Endwert: 22 966,93 €; Barwert: 17 941,73 €

616 0,75 % p.m. > 2,20 % p.q. > 9 % p.a. > 4,40 % p.s.

617 5,367 % p.a.

618 a. Annuitätensschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				120 000,00 €
1	6 450,00 €	17 476,38 €	23 926,38 €	102 523,62 €
2	5 510,64 €	18 415,74 €	23 926,38 €	84 107,88 €
3	4 520,80 €	19 405,58 €	23 926,38 €	64 702,30 €
4	3 477,75 €	20 448,63 €	23 926,38 €	44 253,67 €
5	2 378,63 €	21 547,75 €	23 926,38 €	22 705,92 €
6	1 220,44 €	22 705,92 €	23 926,36 €	0,00 €

b. Zinsschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				120 000,00 €
1	6 450,00 €	0,00 €	6 450,00 €	120 000,00 €
2	6 450,00 €	0,00 €	6 450,00 €	120 000,00 €
3	6 450,00 €	0,00 €	6 450,00 €	120 000,00 €
4	6 450,00 €	0,00 €	6 450,00 €	120 000,00 €
5	6 450,00 €	0,00 €	6 450,00 €	120 000,00 €
6	6 450,00 €	120 000,00 €	126 450,00 €	0,00 €

c. Ratenschuld

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				120 000,00 €
1	6 450,00 €	20 000,00 €	26 450,00 €	100 000,00 €
2	5 375,00 €	20 000,00 €	25 375,00 €	80 000,00 €
3	4 300,00 €	20 000,00 €	24 300,00 €	60 000,00 €
4	3 225,00 €	20 000,00 €	23 225,00 €	40 000,00 €
5	2 150,00 €	20 000,00 €	22 150,00 €	20 000,00 €
6	1 075,00 €	20 000,00 €	21 075,00 €	0,00 €

619 147,97 €

620 a. Nach 3 Jahren setzt man mit den folgenden 3 Zahlungen aus. Danach zahlt man den Kredit mit 4 nachschüssigen Raten der Höhe R_2 bis zum Ende des 10. Jahres zurück.

b. $R_2 = R_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^3 : \left(\frac{q^4 - 1}{q - 1} \right)$



ggb/tns
e8j8k4

621 5,75 % p. a.

622 a. 699,20 € b. 1 001,04 €

623 a. 157 160,70 € b. 811,86 €

624 a. 14 Quartalsraten

b. Man berechnet zunächst das Restguthaben nach der Auszahlung der 14 Quartalsraten. Da man die Restzahlung erst ein Quartal später erhält, muss man sie noch ein Quartal lang aufzinsen.

625 a. 203 801,94 €

b.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	–	–	–	1 500 000,00 €
1	90 000,00 €	113 801,94 €	203 801,94 €	1 386 198,06 €
2	83 171,88 €	120 630,06 €	203 801,94 €	1 265 568,00 €

5 Investitions-, Kurs- und Rentabilitätsrechnung

5.1 Investitionsrechnung

626 –

627 –

629 a. 1866€ b. 939€
c. In beiden Fällen ist der Kapitalwert positiv und daher die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

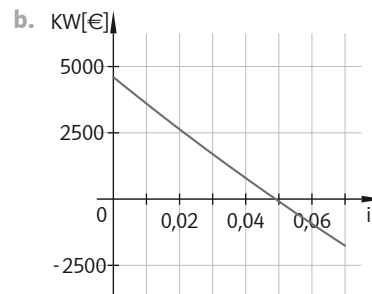
630 a. 7675€ b. 2801€
c. In beiden Fällen ist der Kapitalwert positiv und daher die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

631 a. B b. D



632 a.

Zinssatz i	KW in €
0	4 600
0,005	4 095,77
0,01	3 599,96
0,015	3 112,38
0,02	2 632,84
0,025	2 161,17
0,03	1 697,19
0,035	1 240,74
0,04	791,65
0,045	349,76
0,05	-85,09
0,055	-513,04
0,06	-934,24
0,065	-1348,84
0,07	-1756,97



c. Der Kapitalwert wird für $i \approx 0,049$ gleich 0.

633 a. 73785€ b. 64146,7€

634 Der Kapitalwert beträgt 24 305€ und ist daher deutlich positiv. Die Investition ist vorteilhaft.

635 –




636 a.

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €	Einnahmenüberschüsse in €
0	0	1000 000	-1000 000
1	250 000	35 000	215 000
2	255 000	38 500	216 500
3	260 100	42 350	217 750
4	265 302	46 585	218 717
5	270 608	51 244	219 365
6	276 020	56 368	219 652
7	281 541	62 005	219 536
8	287 171	68 205	218 966
9	292 915	75 026	217 889
10	298 773	82 528	216 245

b. 682 393€; Der Kapitalwert ist positiv, also ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

c. 530 010 €; Der Kapitalwert ist positiv, also ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

 xls/tns
j6gp59 **637**

a.

Jahr	Rückflüsse in €
0	-120 000,00
1	45 000,00
2	38 250,00
3	32 512,50
4	27 635,63
5	23 490,28
6	19 966,74
7	16 971,73
8	14 425,97
9	12 262,07
10	10 422,76

b. ab dem 4. Jahr; 8 372 €

c. ebenfalls ab dem 4. Jahr

Jahr	Rückflüsse in €	Kapitalwert in €
0	-120 000,00	-120 000,00
1	45 000,00	-77 142,86
2	40 500,00	-40 408,16
3	36 450,00	-8 921,28
4	32 805,00	18 067,47
5	29 524,50	41 200,69
6	26 572,05	61 029,16
7	23 914,85	78 025,00
8	21 523,36	92 592,85
9	19 371,02	105 079,59
10	17 433,92	115 782,51

638 **B** und **D**

 xls/tns
rf6t9e **639**

a. 7 507 €

b. 70 208 €

c. Ist der Zinssatz geringer, so sind die einzelnen abgezinsten Rückflüsse größer und somit ist der Kapitalwert größer anstatt kleiner.

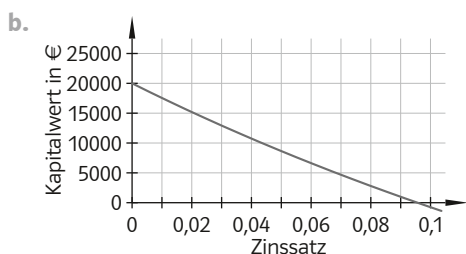
640 a. Fahrzeug A: 13 953 €, Fahrzeug B: 12 427 €

b. Fahrzeug A, da der Kapitalwert höher ist

c. Fahrzeug A: 18 889 €; Fahrzeug B: 16 566 €

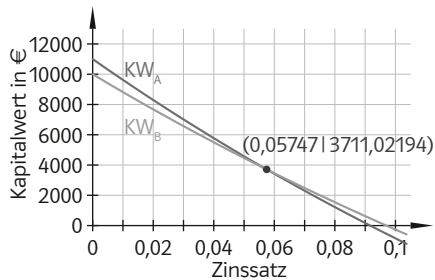
Wieder sollte man sich für Fahrzeug A entscheiden, da dessen Kapitalwert höher ist.

642 a. $KW(i) = -80\,000 + 25\,000(1+i)^{-1} + 25\,000(1+i)^{-2} + 25\,000(1+i)^{-3} + 25\,000(1+i)^{-4}$



Der Kalkulationszinssatz muss unter 9,654 % liegen.

643 a.



- b. Bis zu einem Kalkulationszinssatz von 5,747% ist die Investition A zu bevorzugen, ab diesem die Investition B.

xls 644
5pk7r3

Siehe Mathematik anwenden HAK-Online.

xls/tns 646
7k32ip

- a. 4,30%
b. Der interne Zinssatz liegt über dem Marktzinssatz, daher ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

xls/tns 647
tu97w5

- a. 14,63%
b. Der interne Zinssatz liegt über dem Marktzinssatz, daher ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

xls/tns 648
k99ud3

- a. 6,57%
b. Der interne Zinssatz liegt über dem Marktzinssatz, daher ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

xls/tns 649
63r6u4

- a. 6025 € b. 7,18%
c. Der Kapitalwert ist positiv, der interne Zinssatz liegt über dem Marktzinssatz, daher ist die Investition eine sinnvolle Geldanlage.

xls/tns 650
3y77zc

a.

Jahr	Rückflüsse in €
0	-1500 000,00
1	120 000,00
2	122 400,00
3	124 848,00
4	127 344,96
5	129 891,86
6	132 489,70
7	135 139,49
8	137 842,28
9	140 599,13
10	143 411,11
11	146 279,33
12	149 204,92
13	152 189,02
14	155 232,80
15	158 337,45
16	161 504,20
17	164 734,28
18	168 028,97
19	171 389,55
20	174 817,34

- b. 110024 €
- c. 6,83 %



xls/tns
rj8e3x

651 5 Jahre: 0,97%; 10 Jahre: 15,87%; 15 Jahre: 19,09 %
Je länger die Nutzungsdauer ist, desto höher ist auch der interne Zinssatz.

652 –



Link
gz4m26

653 –

- 655**
- a. 6,801% > 5%, also sinnvoll
 - b. 11,704% > 3,25%, also sinnvoll
 - c. 11,191% > 6,125 %, also sinnvoll

656 a. 8,946% > 3 %, also sinnvoll b. 9,450% > 4 %, also sinnvoll c. 9,961% > 5 %, also sinnvoll

657 a. 32,57% b. 15,80% c. 16,08%, er wird größer

658

- a. 8,14 %
- b. 5,57%
- c. Wenn man tatsächlich vor hat, die nächsten 10 Jahre lang Schuhe bei diesem Händler zu beziehen, dann ist die Investition finanziell sinnvoll.

659

- a. 6,40 %
- b. 4,76 %
- c. 5,81%; Nein, der modifizierte interne Zinssatz steigt, da zunächst der Endwert der Rückflüsse größer wird.

661

- a. Investition A: 2044 €, Investition B: 2212 €. Investition B ist zu bevorzugen.
- b. Investition A: 5,44 %, Investition B: 5,37%. Investition A ist zu bevorzugen.
- c. Investition A: 5,12%, Investition B: 5,10%. Beide Investitionen sind praktisch gleich zu bewerten.

662

- a. A: 94 307,82 €; B: 84 145,22 €. Investition A hat den höheren Kapitalwert.
- b. A: 15,551%; B: 19,934 %. Investition B hat den höheren internen Zinssatz.
- c. A: 10,963%; B: 13,322%. Investition B hat den höheren modifizierten internen Zinssatz.

663 a.

	neu	gebraucht
Kapitalwert in Euro	75 067	45 388
interner Zinssatz	12,50 %	25,37 %
modifizierter interner Zinssatz	8,58 %	11,31 %

b. Der Kapitalwert des neuen Busses ist größer als jener des gebrauchten. Beim internen und modifizierten internen Zinssatz schneidet hingegen der gebrauchte Bus deutlich besser ab. Alleine aus diesen drei Vergleichen ergibt sich keine eindeutig bessere Variante. Allerdings ist zu bedenken, dass der neue Bus mehr als doppelt so viel wie der gebrauchte Bus kostet. So gesehen könnte man sich alternativ auch die Anschaffung von zwei gebrauchten Bussen überlegen. Bei entsprechender Auslastung wäre das eindeutig die gewinnbringendere Variante.

c.

	neu	gebraucht
Kapitalwert in Euro	65 911	42 547
modifizierter interner Zinssatz	8,96 %	11,91 %

Der Kapitalwert des neuen Busses ist aufgrund des gestiegenen Zinssatzes stärker gesunken als der Kapitalwert des gebrauchten Busses. Der modifizierte interne Zinssatz des gebrauchten Busses ist stärker gestiegen als jener des neuen Busses. Obwohl der Kapitalwert des neuen Busses immer noch größer ist, beeinflusst das die Kaufentscheidung eher in Richtung des gebrauchten.

- 664 a. $BW_A = 11812 \text{ €}; BW_B = 9963 \text{ €}$
- b. $i_A = 3,46 \text{ \% p.a.}; i_B = 3,33 \text{ \%}$
- c. $i_{\text{mod}A} = 3,24 \text{ \%}; i_{\text{mod}B} = 3,18 \text{ \%}$
- d. Bei allen drei Methoden ist die Maschine A vorzuziehen.

665 –

666 Hinweise: Wie lassen sich Einnahmen und Ausgaben wirklich abschätzen? Wie entwickelt sich der Markt? ...

667 Hinweise: Sicherung von Arbeitsplätzen, Umweltschutz, soziale Aspekte ...

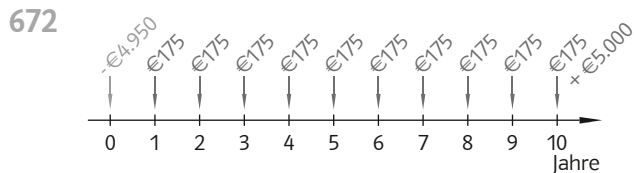
668 Siehe Schulbuch Seite 184.

669 Siehe Schulbuch Seite 184.

670 Siehe Schulbuch Seite 184.

671 Siehe Schulbuch Seiten 184 und 185.

5.2 Kurs- und Rentabilitätsrechnung



- 674 a. 860 €, unter pari b. 2437,50 €, unter pari c. 5050 €, über pari d. 500 €, pari

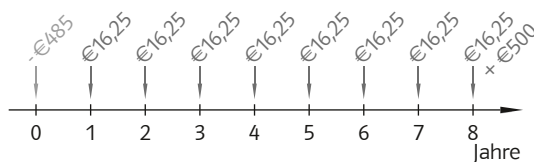


b. 3,87%

677 a. 485 €

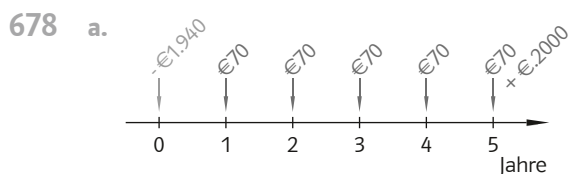
b. 16,25 €

c.



d. 3,69%

e. 2,68%



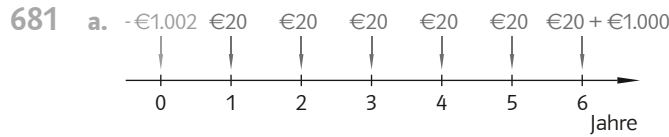
b. 4,18%

c. 3,04%

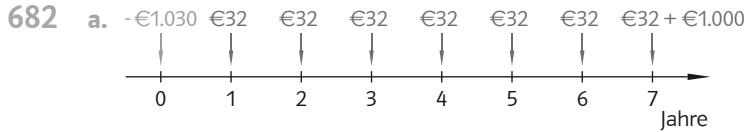


679 **A, C**

680 –



b. 1,96%



b. 2,72%

c. –

683 Rendite vor KEST: A-Void: 4,55%; B-Ware: 4,55%

Rendite nach KEST: A-Void: 3,30%; B-Ware: 3,31%

Die Rendite vor KEST ist praktisch gleich. Da die Rendite nach KEST für die Anleihe von B-Ware leicht höher ist, sollte sich Herr Obulus für diese Anleihe entscheiden.

685 a. vor KEST: 4,56%; nach KEST: 3,39%

b. vor KEST: 3,49%; nach KEST: 2,61%

c. vor KEST: 2,15%; nach KEST: 1,58%

686 Emissionskurs: 80,25%; Ausgabepreis: 802,50 €

687 71,88%

688 a. 55,84% b. 53,55%

689 a. vor KEST: 3,304%, nach KEST: 2,437% b. 95,38%

691 101,37%

692 a. 106,8%

b. 99,5%

c. Der Emissionskurs ist umso größer, je kleiner der Marktzinssatz ist.

693 a. 110,23% b. 116,35% c. 102,27% d. 109,36%

694 **A, C**

695 71,68%

696 –

698 a. **A** b. **B** c. **C** d. **C**

699 a. 99,30% b. 100% c. 100,83% d. 100,19%


700 1,79%

701 a. fairer Kurs: 96,13; Rendite: 2,78%

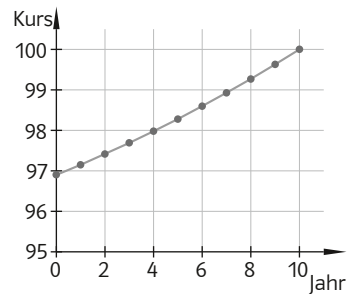
b. fairer Kurs: 101,66; Rendite: 3,60%

c. 3,46%

- d. Die höchste Rendite hat Herr Bauer erreicht, allerdings sind die Anlagezeiträume unterschiedlich. Da über ein weiteres Anlegen der Gelder nichts bekannt ist, kann eigentlich nicht beurteilt werden, wer am besten abgeschnitten hat.

 xls 702
xz2k8r

Jahr	Kurs	Zahlungen
0	96,6	-96,9
1	97,15	4
2	97,42	4
3	97,69	4
4	97,98	4
5	98,28	4
6	98,60	4
7	98,63	4
8	99,27	4
9	99,63	4
10	100	104



Rendite: 4,390 %
q = 1,04390

- 704 a. clean price: 516,77€, dirty price: 524,79 €
b. 3,82%
- 705 a. 1032,61€ b. 989,41€
- 706 a. C b. A
- 707 a. 52,5€ b. 122,50€ c. 75,25€
- 708 a. 36,66€ b. 30€ c. 21,66€
- 709 clean price: 1007,83€, dirty price: 1027,83€
- 710 107,01% des Nennwertes
- 711 a. 2,92% b. 6,75%
- 712 a. 3,432% b. 11 227€ c. 0,54%
- 713 Siehe Schulbuch Seite 185.
- 714 Siehe Schulbuch Seite 185.
- 715 Siehe Schulbuch Seite 185.
- 716 Siehe Schulbuch Seite 185.

Zusammenfassende Aufgaben



b. 2,78%

- 718 a. 5,60%
b. 4,41%

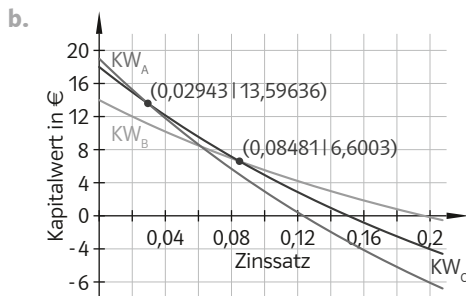
- c. 4,24%
- d. Wenn die Rückflüsse zum internen Zinssatz angelegt werden, ist der modifizierte Zinssatz gleich dem internen Zinssatz. Begründung: Beim internen Zinssatz ist der Barwert der Rückflüsse gleich dem investierten Kapital K_0 , daher ist der Endwert der mit dem internen Zinssatz verzinsten Rückflüsse $E_R = K_0 \cdot (1 + i_{\text{int}})^n$. Der modifizierte interne Zinssatz ist dann

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[n]{\frac{K_0 \cdot (1 + i_{\text{int}})^n}{K_0}} - 1 = \sqrt[n]{(1 + i_{\text{int}})^n} - 1 = (1 + i_{\text{int}}) - 1 = i_{\text{int}}$$

- 719 a. 3,91% b. 3,5% c. 2,76%
- 720 a. $KW_A = 1777\text{€}; KW_B = 5174\text{€}$
 b. $i_A = 4,97\% \text{ p.a.}; i_B = 6,37\%$
 c. $i_{\text{modA}} = 4,56\%; i_{\text{modB}} = 5,40\%$
 d. Bei allen drei Methoden ist LKW B vorzuziehen.
- 721 a. fairer Kurs: 101,14% ; Rendite: 5,67% b. fairer Kurs: 99,71% ; Rendite: 4,98%

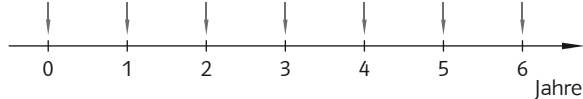
722 1455€
 Die Investition ist sinnvoll, da der Kapitalwert größer als 0€ ist.

- 723 a. $KW_A(i) = -50 + 7(1+i)^{-1} + 20(1+i)^{-2} + 20(1+i)^{-3} + 22(1+i)^{-4}$
 $KW_B(i) = -20 + 4(1+i)^{-1} + 5(1+i)^{-2} + 10(1+i)^{-3} + 15(1+i)^{-4}$
 $KW_C(i) = -40 + 12(1+i)^{-1} + 11(1+i)^{-2} + 15(1+i)^{-3} + 20(1+i)^{-4}$



- c. Bis zu einem Marktzinssatz von 2,943% hat Investition A den größten Kapitalwert, danach bis zu einem Zinssatz von 8,481% Investition C und ab einem Marktzinssatz von 8,481% hat Investition B den größten Kapitalwert.

- 724 a. 3009€
 b. 3000€ Tilgungsbetrag und 150€ Zinsen, also insgesamt 3150€
 c. -€100,30 €3,64 €3,64 €3,64 €3,64 €3,64 €3,64 €3,64 + €100



- d. 3,641% entspricht der angeführten Emissionsrendite von 3,64%
- e. 101,94%

- 725 a. I. 100% II. 85%
 b. I. 1000€ II. 1000€
 c. I. Zinsen werden jährlich ausgezahlt. II. Es werden keine Zinsen ausgezahlt.
 d. I. ja, korrekt II. ja, korrekt
 e. I. 1,81% II. 2,44%

(Anmerkung: Da vor dem Jahr 2016 die KEST 25% betrogen und der Kursgewinn nur bei der Nullkuponanleihe versteuert werden musste, wären die korrekten Lösungen eigentlich I. 1,875%, II. 2,52%.)

- 726 a. -124 € b. 4,305% c. 4,375%
- 727 a. Kaufpreis: 5060 €; Kupon: 212,50 € b. 3,98%
- 728 a. 3,88%
- b. Die Investition ist sinnvoll, da der modifizierte interne Zinssatz über dem Marktzinssatz liegt.

Was habe ich in diesem Semester gelernt? – 6. Semester

Die Lösungen zu den Aufgaben 729–753 sind im Schulbuch auf den Seiten 185–186 zu finden.

Mathematik anwenden
HAK LÖS 3

Schulbuchnummer 175802

ISBN 978-3-209-08079-0

www.oebv.at

ISBN 978-3-209-08079-0



9 783209 080790