Ich kann den Begriff der Wahrscheinlichkeit erklären.

c **1** Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter exakt festgelegten Bedingungen abläuft, unter diesen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist und dessen Ausgang $\omega \in \Omega$ nicht eindeutig vorhersehbar ist. Das Werfen eines Würfels ist ein Zufallsexperiment. Ein Würfel wird n mal geworfen, wobei die Augenzahl ω mit absoluter Häufigkeit $H(\omega)$ auftritt.
Vervollständige den Satz, sodass eine mathematisch richtige Aussage entsteht. Wähle dazu die richtigen Satzteile aus.

Wenn n groß ist, das heißt, wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, so nähert sich …. **I.** …. immer mehr einer Zahl …. **II.** …. .

I.
a. die absolute Häufigkeit $H_n(\omega)$
b. die relative Häufigkeit $h_n(\omega)$
c. die Wahrscheinlichkeit $P_n(\omega)$

II.
a. $P(\omega)$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.
b. $h(\omega)$, der relativen Häufigkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.
c. $\frac{h_n(\omega)}{n}$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.

c **2** Ein spezieller 6-seitiger, fairer Spielwürfel hat auf vier Seiten das Symbol „θ" abgebildet und auf zwei Seiten das Symbol „∞". Dieser Würfel wird 20-mal hintereinander geworfen. Man erhält dabei 11-mal das Symbol θ und 9-mal das Symbol ∞.

a. Kreuze an, welche Zahl die Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ für das Auftreten von Symbol θ angibt.

A $P(\theta)=\frac{9}{20}$ B $P(\theta)=\frac{11}{20}$ C $P(\theta)=\frac{2}{3}$ D $P(\theta)=\frac{11}{9}$ E $P(\theta)=\frac{1}{3}$

b. Begründe deine Entscheidung aus Aufgabe **a.**, indem du erklärst, was man unter der Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ versteht.

c. Das Zufallsexperiment wird n-mal wiederholt, das heißt, der Würfel wird n-mal geworfen. Erkläre, welcher Zahl $P(\infty)$ sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\infty)$ annähern müssen, wenn n immer größer wird.

c **3** Bei einer Tombola gibt es insgesamt 400 Lose. Davon gewinnen 10 Lose einen Hauptpreis und 50 Lose einen Sachpreis. Die übrigen Lose sind Nieten, das heißt, man gewinnt nichts.

a. Erkläre den Begriff „Wahrscheinlichkeit" anhand des Beispiels.

b. Sigmund behauptet: „Wenn ich 40 Lose kaufe, gewinne ich mit Sicherheit einen Hauptpreis." Argumentiere, ob Sigmund mit seiner Behauptung recht hat oder nicht, und stelle gegebenenfalls richtig.

c **4** Ein fairer Würfel wird n-mal geworfen. Die Grundmenge dieses Zufallsexperiments ist $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Ein Ausgang des Zufallsexperiments ist $\omega \in \Omega$, der mit der relativen Häufigkeit $h_n(\omega)$ auftritt.

a. Kreuze die richtige Aussage an.

A Für alle Versuchsausgänge $\omega \in \Omega$ gilt $0 \le \omega \le 1$.
B Wenn n sehr groß ist, gilt $P(\omega) \approx h_n(\omega)$.
C Wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, gilt $P(\omega)=1$.
D Wenn ω ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(\omega)=0$.
E Die Wahrscheinlichkeit $h_n(\omega)=\frac{1}{6}$.

b. Stelle alle falschen Aussagen aus Aufgabe **a.** richtig.

Lösungen zu:
Ich kann den Begriff der Wahrscheinlichkeit erklären.

1 Wenn n groß ist, das heißt, wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, so nähert sich **I. b.** die relative Häufigkeit $h_n(\omega)$ immer mehr einer Zahl **II. a.** $P(\omega)$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.

2 **a.** C $P(\theta) = \frac{2}{3}$

b. Wenn man mit diesem Spezial-Würfel würfelt, erscheint immer eines der beiden Symbole auf der oben liegenden Seite. Würfelt man n-mal, dann ist die relative Häufigkeit für das Symbol s (entweder $s = \infty$ oder $s = \theta$) $h_n(s) = \frac{\text{Anzahl der Würfe mit Ergebnis s}}{n}$. (Zum Beispiel erhält man mit den Zahlen aus der Angabe $h_{20}(\theta) = \frac{11}{20}$ und $h_{20}(\infty) = \frac{9}{20}$.) Wenn man den Würfel immer öfter wirft, nähert sich die relative Häufigkeit $h_n(\theta)$ immer mehr dem Wert $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ an. Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Symbol θ gewürfelt wird.

c. Wenn n immer größer wird, müssen sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\infty)$ immer mehr der Zahl $P(\infty) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ annähern.

3 **a.** Wenn man ein Los kauft und „blind" aus dem Topf mit Losen zieht, erhält man entweder ein Los, das einen Haupttreffer (H), einen Sachpreis (S) oder gar nichts (N) gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ für $\omega \in \Omega = \{H, S, L\}$ gibt an, ob man eher damit rechnen kann, einen Haupttreffer, einen Sachpreis oder gar nichts zu gewinnen. Da es insgesamt 10 Hauptgewinn-Lose gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass man eines davon zieht, $P(H) = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$. Die Wahrscheinlichkeit für ein Los, das einen Sachpreis gewinnt, ist daher $P(S) = \frac{50}{400} = \frac{1}{8}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Niete ist $P(H) = \frac{340}{400} = \frac{17}{20}$ (Da sich 400-10-50=360 Nieten im Los-Topf befinden.).

Wenn man also sehr viele Lose kauft, so werden ungefähr $\frac{1}{40}$ dieser Lose Gewinnlose für einen Hauptgewinn sein, $\frac{1}{8}$ dieser Lose werden einen Sachpreis gewinnen und $\frac{17}{20}$ dieser Lose (also der größte Teil der Lose) werden Nieten sein.

b. Sigmund hat nicht recht mit seiner Behauptung. Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Los für einen Hauptgewinn zieht, beträgt $\frac{1}{40}$. Das heißt, wenn man sehr viele Lose kauft, werden etwa $\frac{1}{40}$ dieser Lose Gewinnlose für einen Hauptgewinn sein. Man kann aber nicht mit Sicherheit sagen, dass eines von Sigmunds Losen einen Hauptgewinn erzielt.

4 **a.** richtige Aussage: B [Wenn man das Zufallsexperiment immer öfter wiederholt, nähern sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\omega)$ immer mehr der Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ an.]

b. Die richtiggestellten Aussagen lauten:

A Für alle Versuchsausgänge $\omega \in \Omega$ gilt $0 \le P(\omega) \le 1$.

C *entweder*: Wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, gilt $P(\omega) \approx h_n(\omega)$.

oder: Wenn ω ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(\omega) = 1$.

D *entweder:* Wenn E ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(E) = 1$.

oder: Wenn E ein „unmögliches Ereignis" ist, dann gilt $P(E) = 0$.

E Die Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = \frac{1}{6}$.

Autorin: Bettina Ponleitner