LÖSUNG ZU 256:

a) 1)

Der Weg ist allgemein das Integral über eine Geschwindigkeitsfunktion in den Grenzen des gesuchten Intervalls. Für w_1 gilt also:

$w_1 = \int_{0,4}^{1,75} v_1(t)\, dt = \int_{0,4}^{1,75} -6{,}5t^3 + 14{,}2t^2 + 9t \; dt = 22{,}9269 \ldots$

Um w_2 zu berechnen, stellen wir zunächst eine lineare Funktion f auf, deren Graph durch die Punkte $P_1 = (0{,}4 \mid 6)$ und $P_2 = (1{,}75 \mid 24{,}4)$ verläuft. Mithilfe von Technologie erhält man: $f(t) = 13{,}629 \ldots \cdot t + 0{,}548 \ldots$

Für w_2 gilt also:

$w_2 = \int_{0,4}^{1,75} f(t)\, dt = \int_{0,4}^{1,75} (13{,}629 \ldots \cdot t + 0{,}548 \ldots)\, dt = 20{,}52$

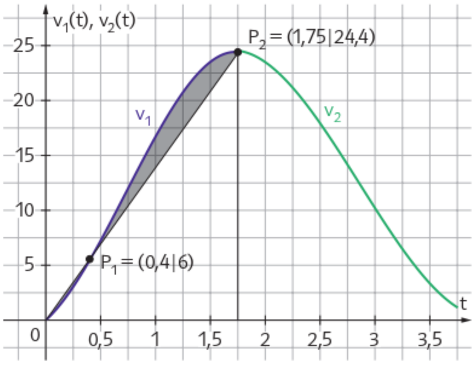
Damit erhalten wir für den gesuchten Wert: $w_1 - w_2 = 2{,}406 \ldots$

2)

Wir verwenden die Formeln aus a1) und wenden die Differenzenregel für bestimmte Integrale an. Es gilt dann:

$$w_1 - w_2 = \int_{0,4}^{1,75} v_1(t)\, dt - \int_{0,4}^{1,75} f(t)\, dt = \int_{0,4}^{1,75} \big(v_1(t) - f(t)\big)\, dt$$

Da im Intervall $[0{,}4; 1{,}75]$ $v_1(t) \geq f(t)$ gilt, entspricht das Integral exakt dem Flächeninhalt der von den Graphen der Funktionen eingeschlossen wird:



3)

Anhand des Graphen erkennen wir, dass die maximale Beschleunigung im Intervall $[0; 1{,}75]$ liegen muss. Wir verwenden für die Berechnung also die Funktion v_1. Die Beschleunigung entspricht der 1. Ableitung der Geschwindigkeit. Da wir die maximale Beschleunigung suchen, müssen wir die Beschleunigungsfunktion erneut ableiten (dies entspricht der 2. Ableitung von v_1) und diese 0 setzen:

$v_1''(t_1) = -39 \cdot t + 28{,}4 = 0$

Damit folgt $t_1 = 0{,}7282 \ldots$

(Anmerkung: Grundsätzlich könnte ein Maximum auch am Rand des Intervalls liegen, hier erkennt man aber mithilfe der Abbildung bzw. aus dem Sachzusammenhang, dass das hier nicht der Fall sein kann)

b) 1)

Da wir das Intervall $[1{,}75; 3{,}75]$ in vier gleich große Teilintervalle teilen, hat jedes dieser Teilintervalle eine Länge von $\frac{2}{4} = 0{,}5$.

Da die Funktion v_2 im gesamten Intervall $[1{,}75; 3{,}75]$ streng monoton fallend ist, müssen wir zur Berechnung der Untersumme immer den Funktionswert am rechten Rand des entsprechenden Teilintervalls verwenden. Es gilt also:

$U_4 = 0{,}5 \cdot v_2(2{,}25) + 0{,}5 \cdot v_2(2{,}75) + 0{,}5 \cdot v_2(3{,}25) + 0{,}5 \cdot v_2(3{,}75) = 21{,}2825\ldots$