11 Relativistische Masse und Energie

Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Massenzunahme

A1 Was versteht man unter der "Masse"? Kann man Masse mit Materie gleichsetzen? Was versteht man unter "Invarianz der Masse"? Was soll man sich unter der „Massenzunahme“ vorstellen? Werden Objekte dadurch irgendwie dicker (Abb. 1)?

Abb. 1: Ist diese Veranschaulichung von Massenzunahme richtig?

A2 Stell dir folgende Situation vor: Eine Untertasse fliegt gegen eine Wand und beschädigt diese (Abb. 2 a). Die Tiefe des Lochs ist ein Maß für die „Wucht“, mit der das Raumschiff aufprallt. Diese Wucht bezeichnet man in der Physik als Impuls. Der Impuls ist definiert als Masse mal Geschwindigkeit. Je größer Aufprallgeschwindigkeit und/oder Masse, desto größer ist der Impuls (die Wucht) und desto größer wird das Loch.

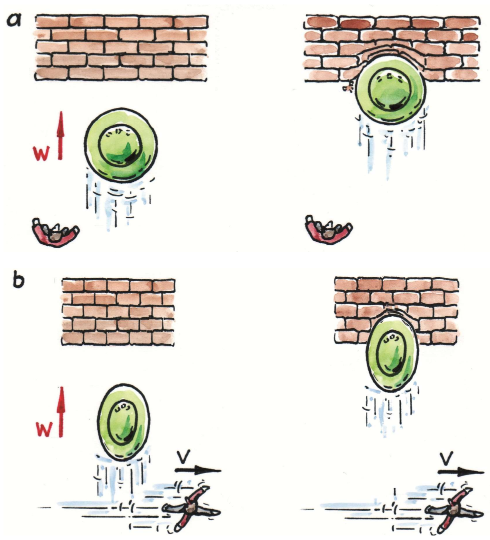

Abb. 2 (Grafik: Janosch Slama)

Wenn du dich während des Aufpralls sehr schnell parallel zur Wand bewegst (Abb. 2 b), dann läuft für dich auf Grund der Zeitdilatation der Vorgang langsamer ab – ein Zeitlupencrash. Geschichten gehen aber immer gleich aus. Das Loch muss daher auch von diesem System aus gesehen gleich groß sein. Leite aus diesem Ansatz heraus die relativistische Massenzunahme ab.
Hilfe: Der Impuls wird durch die Gleichung $p = mw$ beschrieben (Anm.: Nimm für die Geschwindigkeit ausnahmsweise den Buchstaben w, weil du v für die Relativgeschwindigkeit im Fall b brauchst). Weiters sollen für die Geschwindigkeiten $w << v < c$ gelten. Die Zeitdilatation wird mit $t_\mathrm{b} = t_\mathrm{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ berechnet.

A3 Stell dir eine Rakete vor, die mit 10 m/s² beschleunigt (Abb. 3). Dadurch hat man eine künstliche Gravitation mit erdähnlichen Bedingungen erzeugt. Nach welcher Zeit hätte die Rakete aus klassischer Sicht die Lichtgeschwindigkeit erreicht? Warum klappt das aber leider trotzdem nicht?

Abb. 3 (Grafik: Janosch Slama;)

A4 In Teilchenbeschleunigern wird die relativistische Massenzunahme bestens bestätigt. Der größte Beschleuniger der Welt ist der Large Hadron Collider am CERN (Abb. 4). Dort lässt man etwa Protonen aufeinander prallen. Für ihre Kreisbahn ist die Zentripetalkraft $F_{zp} = \frac{mv^2}{r}$ notwendig. Deshalb lässt man die Teilchen durch starke Magnetfelder fliegen, wodurch sie von der Lorentz-Kraft $F_L = I \cdot s \cdot B$ quer zur Flugrichtung abgelenkt werden. Berechne, um welchen Faktor die magnetische Induktion B erhöht werden muss, um die Protonen auf der Kreisbahn zu halten, wenn diese auf 0,999999991 c beschleunigt werden. Für den Strom gilt $I = Q/t$, wobei Q die Ladung ist.

A5 Ein strombetriebener O-Bus und ein umweltfreundliches Auto mit superhochleistungsfähigem Elektromotor beschleunigen auf fast Lichtgeschwindigkeit und fahren dann über eine Waage. Ist ihre Masse gestiegen?

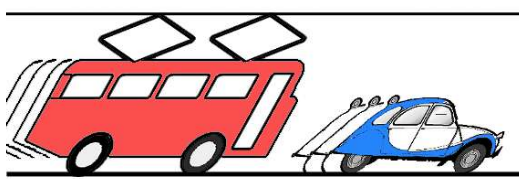

Abb. 4 (Grafik: Martin Apolin)

ISBN: 978-3-209-08538-2

A6 Welche Eigenschaften müssen Photonen haben, weil sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können? Oder anders gefragt: Was dürfen sie *nicht* haben? Begründe mit Hilfe der Formel $m_d = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

A7 Ein Spielzeugauto mit aufgezogenem Federmotor startet. Wie ändert sich die Masse des Autos aus Sicht des Zuschauers und aus Sicht einer Puppe im Auto? Vernachlässige die Reibung!

E = *mc*² und relativistische Energie

A8 Welche Einheit hat der Ausdruck mc^2? Schreibe dazu die Einheiten von Masse und Energie an, gruppiere sie um und vereinfache sie!

A9 Bewegt sich ein Objekt relativ zu dir, so ist von dir aus gesehen seine Masse größer als in Ruhe. Man spricht dann von der dynamischen Masse (siehe z. B. A6). Weiters kann man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ durch folgende Reihe annähern: $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3 + \cdots$. Wende diese Reihenentwicklung auf m_d an, multipliziere das Ganze mit c^2 und interpretiere das Ergebnis!

A10 Newton formulierte sein Kraftgesetz ursprünglich als $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ (Impuls $p = mv$). Für konstante Masse m ergibt sich die bekannte Form $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$. Bei einigen Probleme der klassischen Mechanik (z. B. Raketen) und in der relativistischen Mechanik ist aber die Masse nicht konstant. Man erhält daher $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
Nehmen wir nun ein Proton, das schon eine sehr hohe Geschwindigkeit besitzt, sagen wir 0,99999 c. Das ist im LHC leicht zu erreichen. Weil die Geschwindigkeit nun praktisch nicht mehr zu vergrößern ist, kann man $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ setzen und für $v = c$ einsetzen. Eine auf dem Weg $\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}t$ auf das Proton wirkende Kraft F erhöht zwar nicht die Geschwindigkeit, aber Energie, Masse und Impuls. Leite daraus die Gleichung $\Delta E = \Delta mc^2$ ab! Es gilt $\mathrm{d}E = F\mathrm{d}x$.

A11 Zeige, dass bei Geschwindigkeiten $v << c$ der Ausdruck $E_k = (m_d - m)c^2$ in den dir bekannten Ausdruck $E_k = \frac{mv^2}{2}$ übergeht. Verwende dazu den Ausdruck für die dynamische Masse aus A6 und die Angabe aus A9.

A12 Zwei mit sehr hoher Geschwindigkeit zusammenstoßende Elektronen (e^-) können zusätzlich ein Proton (p^+) und ein Antiproton (p^-) erzeugen (siehe Abb. 5). Protonen und Antiprotonen habe eine Masse, die 1836-mal so groß ist wie die der Elektronen. Mit welcher Mindestgeschwindigkeit muss man die beiden Elektronen aufeinander schießen, damit diese Reaktion ablaufen kann?

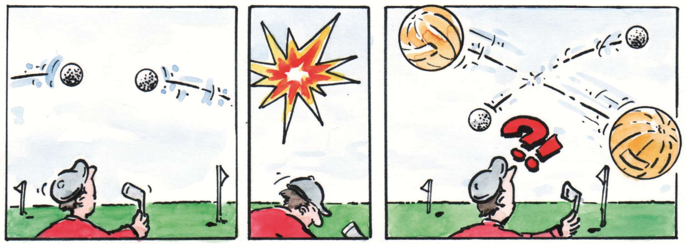
Abb. 5: Die Gleichung $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + p^+ + p^-$ auf den Alltag übersetzt: Zwei Golfbälle stoßen zusammen und erzeugen zusätzlich zwei Medizinbälle (Grafik: Janosch Slama).

A13 Wie sehr nimmt die Masse von 1 l Wasser zu, wenn du es von Zimmertemperatur (20 °C) zum Kochen bringst und dabei kein Dampf austritt, etwa in einem Druckkochtopf? Ist diese Massenänderung zu bemerken? Verwende für deine Berechnung Abb. 6.

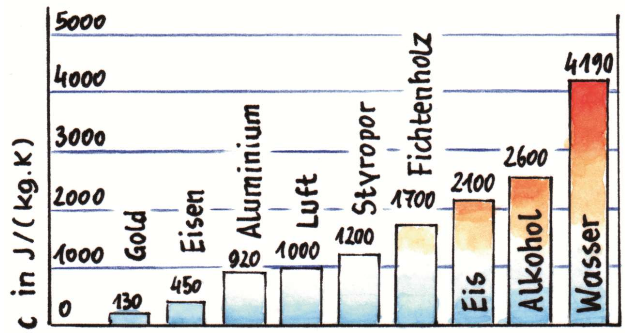

Abb. 6: Einige gerundete Werte für die spezifische Wärmekapazitat (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 18.9, S. 77, BB6).

A14 Die Batterie in Abb. 7 hat laut Hersteller im aufgeladenen Zustand rund 9600 Coulomb. Es gilt $E = Q{\cdot}U$. Wie viel Masse verliert die Batterie, wenn sie komplett entladen wird?

Abb. 7: Eine Batterie vom Typ AA mit einer Spannung von 1,5 V (Foto: Martin Apolin).

A15 Wenn ein Körper auskühlt, hat er weniger Energie und somit auch weniger Masse. Lohnt es sich, vor dem Wiegen kalt zu duschen, damit die Waage etwas weniger anzeigt? Nimm für deine Schätzung folgendes an: 1) Der Körper kühlt beim Duschen um 1 °C ab; 2) Die Person hat eine Masse von 100 kg und 3) Der Körper besteht zu 100 % aus Wasser (und nicht aus etwa 60 bis 70 %). Verwende für deine Berechnung Abb. 6!

A16 Der Energieumsatz von ganz Österreich beträgt im Jahr etwa 10^{18} J. Welche Masse hat diese umgesetzte Energie?

A17 Begründe allgemein, warum die Massenänderungen durch Energieübertragung (etwa beim Kochen, beim Auskühlen oder beim Entladen einer Batterie; siehe A13 bis A15) im Alltag nicht zu bemerken sind!

Kernfusion und Kernspaltung

A18 Tief im Sonneninneren werden Kerne von Wasserstoff (H), Deuterium (^{2}H, schwerer Wasserstoff) und Tritium (^{3}H, überschwerer Wasserstoff) in verschiedenen Reaktionen zu schwereren Kernen verschmolzen. Das nennt man Kernfusion (siehe Kap. 47.2, BB8). Der springende Punkt ist nun der: Die Gesamtmasse der Einzelteile ist dabei stets größer als die des neuen Kerns. Das nennt man den Massendefekt. Wie viele Kernverschmelzungsvorgänge in der Sonne sind nötig, damit diese eine Leistung von größenordnungsmäßig 10^{26} W erzielen kann? Verwende dazu die Daten aus Abb. 8!

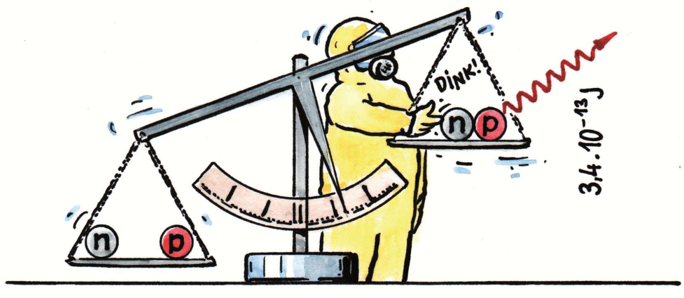

Abb. 8: Nimm an, du schiebst ein Neutron an ein Proton heran. Ab etwa 10^{-15} m zieht die starke Wechselwirkungskraft (siehe Kap. 48.2.3, BB8) das Proton an. Im gebundenen Zustand hat es weniger Energie, die in Form von Strahlung bzw. Masse frei wird (Grafik: Janosch Slama).

A19 Die Sonne strahlt größenordnungsmäßig 10^{26} J/s aus. Welche Masse verliert die Sonne dabei pro Sekunde? Welche Seitenlänge hätte ein „Wasserwürfel" mit dieser Masse?

A20 a Was versteht man unter einem Elektronvolt?

A20 b Rechne die Bindungsenergie eines Deuterons (also des Kerns eines Deuterium-Atoms ^{2}H) in Elektronvolt um. Hilf dir dabei mit Abb. 8 und der Antwort auf A20 a. Die Bindungsenergie von Molekülen liegt im Bereich von einigen Elektronvolt. Welchen Schluss kann man daraus ziehen?

A21 Ein kg Heizöl hat einen Brennwert von $4 \cdot 10^7$ J. Wie groß ist der "Brennwert" von 1 kg Uran? Wie kann man den Unterschied begründen? Überlege zur Berechnung des „Brennwerts" folgendermaßen: Beim „Zusammenbau" eines Uran-235-Kerns beträgt der Massendefekt der verwendeten "Bausteine" etwa 0,8 % (Abb. 9), bei mittelschweren Kernen wie Rubidium-96 oder Cäsium-137 aber etwa 0,9 %. Wenn also Urankerne in mittelschwere Kerne zerfallen (siehe Abb. 10), wird Masse und somit auch Energie frei.

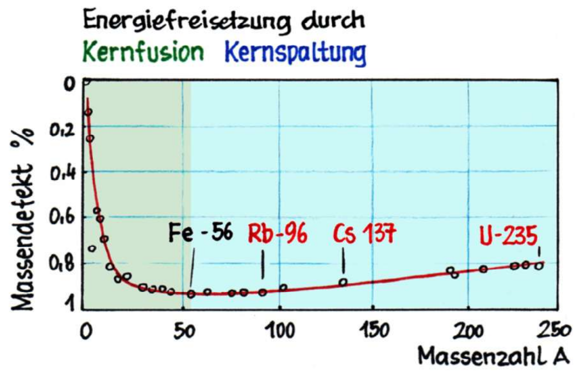

Abb. 9 (Grafik: Janosch Slama;)

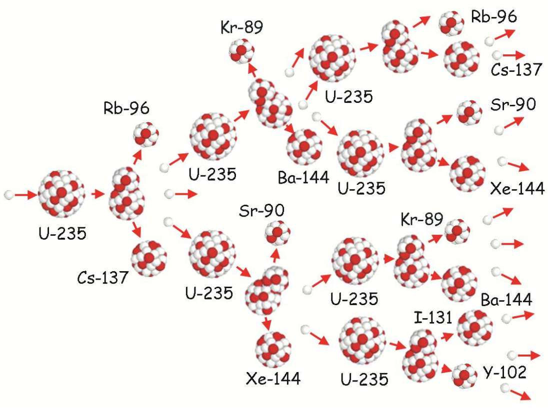

Abb. 10: Es gibt viele Möglichkeiten, welche Tochterkerne beim Zerfall eines Urankerns entstehen. Bei allen Zerfallsprodukten handelt es sich aber um mittelschwere Kerne (Grafik: Janosch Slama).

Hilfe zu A1: Die Masse ist, trocken gesagt, eine Eigenschaft der Materie. Sie hat zwei Erscheinungsformen. Da ist einmal der Widerstand jedes Gegenstandes gegenüber Geschwindigkeitsveränderungen. Das nennt man die Trägheit eines Gegenstandes und sie wird durch die träge Masse hervorgerufen. Je größer diese ist, desto mehr Kraft braucht man, um die Geschwindigkeit des Gegenstands zu verändern. Auf der anderen Seite werden massenreichere Objekte durch die Gravitation stärker angezogen. Das nennt man die schwere Masse. In beiden Fällen ist die Einheit das kg, und für ein und denselben Gegenstand sind träge und schwere Masse exakt gleich groß! Die Masse eines Gegenstandes ist im gesamten Universum gleich groß. Sie ändert sich nicht. 1 kg bleibt immer 1 kg, egal ob es sich auf der Erde, auf dem Mond oder in der nächsten Galaxis befindet. Man spricht daher von der Invarianz (Unveränderlichkeit) der Masse.
Wenn man sagt, dass bei einem schnell bewegten Objekt die Masse größer wird, dann ist es nicht „dicker" geworden. Es ist also nicht auf einmal mehr Materie da, sondern das Objekt hat z. B. eine größere Trägheit bekommen. Es ist dann schwerer abzustoppen und auch die benötigte Zentripetalkraft für eine Kreisbahn wächst, so wie bei den Protonen im LHC.

Hilfe zu A2: Die Tiefe des Lochs im Bezugssystem der Mauer (Abb. 2 a) ergibt sich aus dem Impuls $p = mw$. Der Impuls der Untertasse aus deiner Sicht (wenn du dich sehr schnell parallel zur Mauer bewegst) ist $p' = m'w'$ (b). Weil in beiden Fällen das Loch gleich groß ist, muss $p = p'$ gelten. Aus deiner Sicht (Abb. 2 b) läuft die Crash-Szene aber langsamer ab.

Heuristisch kannst du so argumentieren: Wenn die Zeit für die Untertasse langsamer vergeht, sinkt ihre Geschwindigkeit um denselben Faktor. Wenn also die Zeit aus deiner Sicht nur halb so schnell vergeht, so ist die Geschwindigkeit aus deiner Sicht (w') auch nur mehr halb so groß. Daher gilt $w' = w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Etwas mathematischer kannst du so argumentieren: Wenn für dich die Zeit t_r vergeht, vergeht für die Untertasse weniger Zeit, nämlich $t_\mathrm{b} = t_\mathrm{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Der zurückgelegte Weg s der Untertasse ist aus beiden Systemen gleich groß. Welchen Weg legt die Untertasse in der Zeit t_b zurück? Es gilt $s = w \cdot t_b = w \cdot t_\mathrm{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Aus deiner Sicht hat also die Untertasse die Geschwindigkeit $w' = \frac{s}{t_r} = \frac{w \cdot t_\mathrm{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t_r} = w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Das Ergebnis ist natürlich dasselbe wie bei der ersten Überlegung.

Weil das Loch in der Wand und somit die Impulse gleich groß sein müssen, muss daher die Masse um denselben Faktor steigen, wie die Geschwindigkeit sinkt. Es gilt daher $p = p' = m'w' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, und daraus folgt $m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Hilfe zu A3: Weil die Rakete mit 10 m/s² beschleunigt, müsste sie nach $t = c/a = (3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s})/(10\ \mathrm{m/s^2}) = 3 \cdot 10^7\ \mathrm{s}$, also nach einem knappen Jahr, Lichtgeschwindigkeit erreichen und dann sogar überschreiten! Warum klappt das nicht? Eine bestimmte Schubkraft (F) erzeugt eine bestimmte Beschleunigung: $F = m \cdot a$ und somit $a = F/m$. Die Beschleunigung ist also indirekt proportional zur Masse: $a \sim 1/m$. Mit der Geschwindigkeit der Rakete wächst aber auch ihre Masse, und dadurch würde bei gleicher Schubkraft die Beschleunigung sinken – man könnte also 10 m/s² aus Sicht eines ruhenden Beobachters nicht aufrechterhalten. Nun könnte man argumentieren, dass man einfach den Schub erhöhen musste. Das Problem ist aber, dass bei c die Masse unendlich groß werden würde, denn es gilt $m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{m}{0}$. Das würde eine unendlich hohe Schubkraft erfordern. Man kann sich c zwar beliebig annähern, es aber niemals erreichen.

Hilfe zu A4: Wir gehen von der Gleichung der Lorentz-Kraft aus: $F_L = I \cdot s \cdot B$. Für den Strom gilt $I = Q/t$. Jedes Proton bewegt sich in der Zeit t um die Strecke $s = v \cdot t$. Man erhält daher : $F_L = I \cdot s \cdot B = \frac{Q}{t} v \cdot t \cdot B = Q \cdot v \cdot B$.
Damit das Teilchen auf einer Kreisbahn bleibt, muss die Lorentz-Kraft als Zentripetalkraft wirken. Man kann diese beiden Kräfte daher gleichsetzen:
$F_{zp} = \frac{mv^2}{r} = F_L = Q \cdot v \cdot B$, und daraus folgt $B = \frac{mv}{Qr}$ und $B \sim m$. Wenn die Protonen auf 0,999999991 c beschleunigt werden, wächst ihre Masse um den Faktor $m_D = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 7454\, m$ an (Anm.: Für diese Rechnung

brauchst du einen Taschenrechner, der viele Stellen anzeigen kann). Um diesen Faktor wird auch die Stärke der Magneten erhöht, sonst schaffen die Protonen die Kreisbahn nicht. Das ist eine glänzende Bestätigung für die relativistische Massenzunahme.

Hilfe zu A5: Falls du geantwortet hast, dass beide Fahrzeuge einen Massenzuwachs erfahren haben, dann bist du einem weit verbreiteten Irrtum aufgesessen. Die Masse eines Gegenstandes erhöht sich nicht immer, wenn ihm Geschwindigkeit hinzugefügt wird. Die Masse ändert sich aber immer, wenn ihm Energie zugeführt wird. Was soll das bedeuten?
Das Elektroauto führt seine Energiequelle mit sich, es wird ihm von außen keinerlei Energie zugeführt. Was das Auto an Masse dazugewinnt, verliert in gleichem Maße seine Batterie. Für einen ruhenden Beobachter bleibt daher die Masse des Elektroautos immer gleich groß.
Der O-Bus bekommt Energie von außen zugeführt. Daher wächst seine Masse tatsächlich an. Dafür verliert das Kraftwerk im selben Ausmaß an Masse, wie die des Busses steigt. Dieselben Verhältnisse liegen bei einem Teilchenbeschleuniger vor. Daher kann tatsächlich die Masse eines beschleunigten Protons beliebig hoch anwachsen.

Hilfe zu A6: Photonen dürfen keine Ruhemasse *m* haben, denn sonst wäre ihre dynamische Masse m_D bei Lichtgeschwindigkeit unendlich groß. Photonen existieren nur bei Lichtgeschwindigkeit. Man kann sie nicht einfangen und abwiegen.

Hilfe zu A7: Aus Sicht des Zuschauers ist das Auto ein abgeschlossenes System. Was die Feder an Energie und Masse verliert, muss das restliche Auto an Masse und Energie gewinnen. Aus Sicht der Puppe verliert die sich entspannende Feder an Energie und somit an Masse, während das Auto seine Masse behält. In Summe sinkt also die Masse ab.

Hilfe zu A8: Es gilt $[mc^2] = \mathrm{kg} \cdot \frac{m^2}{s^2} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{s^2} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$.
Anders gesagt: Masse mal Geschwindigkeit^2 ist so viel wie Masse mal Beschleunigung mal Weg, ist gleich Kraft mal Weg. Kraft mal Weg entspricht einer Arbeit bzw. einer Energie. Der Ausdruck mc^2 hat daher die Einheit einer Energie!

Hilfe zu A9: Die dynamische Masse wird durch die Gleichung $m_d = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ beschrieben. Weiters kann man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ durch folgende Reihe annähern: $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^3 + \cdots$. Wenn man diese Reihenentwicklung auf die dynamische Masse anwendet, erhält man $m_d = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$. Wenn du nun mit c^2 multiplizierst, erhältst du $m_d c^2 = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$, und wenn du in die Klammer multiplizierst $m_d c^2 = mc^2 + m\frac{v^2}{2} + m\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \cdots$.
Der Ausdruck mc^2 entspricht einer Energie (siehe A8). Daher haben *alle* Summanden die Einheit einer Energie. Wie kann man diese Gleichung interpretieren? Diese Gleichung stellt die Energiebilanz eines Objekts dar. Links steht die Gesamtenergie. Rechts kommt ab dem zweiten Term die Geschwindigkeit vor. Alle diese Terme sind also der kinetischen Energie (E_k) zuzuordnen und sie verschwinden, wenn die Geschwindigkeit null ist. Der erste Term aber bleibt auch bei $v = 0$ über. Selbst ein ruhender Körper hat also überraschender Weise die Energie mc^2. Man nennt diese die Ruheenergie.

Hilfe zu A10: Weil die Geschwindigkeit *c* ist und sich nicht mehr ändert, gilt $F = ma = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 + c\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Außerdem gilt $\mathrm{d}x = c\mathrm{d}t$. Daher kann man schreiben: $\mathrm{d}E = F\mathrm{d}x = c\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}c\mathrm{d}t = c^2\mathrm{d}m$. Daraus folgt weiters $\int_{E_1}^{E_2}\mathrm{d}E = c^2\int_{m_1}^{m_2}\mathrm{d}m = E_2 - E_1 = c^2(m_2 - m_1) = \Delta E = c^2\Delta m$.

Hilfe zu A11: Es gilt $E_k = (m_d - m)c^2$. Weiters gilt für die dynamische Masse $m_d = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ oder als Reihe angenähert $m_d = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$. Für $v \ll c$ kann man die Reihe nach dem zweiten Glied abbrechen: $m_d = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m + \frac{m}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Daher ergibt sich dann $E_k = (m_d - m)c^2 = \left(m + \frac{m}{2}\frac{v^2}{c^2} - m\right)c^2 = \frac{mv^2}{2}$.

Hilfe zu A12: Wo kommt die Masse her, um scheinbar aus dem Nichts Proton und Antiproton zu erzeugen? Die Masse war schon vorher da und steckte in der dynamischen Masse (m_{de}) der aufeinander zurasenden Elektronen. Welche Geschwindigkeit müssen diese mindestens haben? Wir nehmen die relative Elektronenmasse (m_e) mit 1 an. Protonen- und Antiprotonenmasse sind 1836-

mal so groß. Für die dynamische Elektronenmasse vor dem Stoß muss also gelten $m_{de} \geq m_e + 1836\ m_e = 1837\ m_e$. Die Elektronen müssen also zumindest auf eine solche Geschwindigkeit gebracht werden, dass ihre dynamische Masse um den Faktor 1837 wächst. Daraus folgt: $m_{de} \geq 1837\ m_e = \frac{m_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und somit $1837 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ sowie $\frac{1}{1837} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ und $\frac{v}{c} \geq \sqrt{1-\frac{1}{1837^2}} = 0{,}99999985$. Die Elektronen müssen also mindestens auf 99,999985 % der Lichtgeschwindigkeit gebracht werden, damit der Trick gelingen kann.

Hilfe zu A13: Die Spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt 4190 J/(kg·K). Um 1 l Wasser um 80 °C zu erwärmen, sind daher 4190 J/(kg·K)·1 kg·80 °C = $3{,}4 \cdot 10^5$ J nötig. Die Masse nimmt daher nur um $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{3{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{kg}$ zu. Das ist natürlich nicht zu bemerken.

Hilfe zu A14: Eine volle Standardbatterie Typ AA hat rund 9600 Coulomb. Bei 1,5 V entspricht das $E = Q \cdot U = 1{,}44 \cdot 10^4$ J. Beim Entladen nimmt daher die Masse um lächerliche $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1{,}44 \cdot 10^4\ \mathrm{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{kg}$ ab.

Hilfe zu A15: Die Spezifische Wärmekapazität von Wasser beträgt 4190 J/(kg·K) (siehe Abb. 6). Wenn man 100 kg Wasser um 1 °C abkühlt, wird daher eine Energie von 4190 J/(kg·K)·100 kg·1 °C ≈ $4{,}2 \cdot 10^5$ J abgezogen. Durchs Duschen würde die Person daher um lächerliche $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{kg}$ an Masse verlieren. Kalt duschen zahlt sich also nicht aus!

Hilfe zu A16: $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{10^{18}\ \mathrm{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx 11\ \mathrm{kg}$

Hilfe zu A17: Es gilt $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\Delta E}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx \frac{\Delta E}{10^{17}\ \mathrm{m}^2/s^2}$.

Im Nenner befindet sich c^2, und das ist mit rund 10^{17} m²/s² eine wirkliche Mordszahl. Jedes Joule Energie hat daher nur rund 10^{-17} kg Masse. Und das ist eben nicht zu bemerken!

Hilfe zu A18: Nach Abb. 8 werden bei der Fusion von Proton und Neutron $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ J frei. Ein Watt entspricht dem Energieumsatz von 1 J/1 s. 10^{26} W sind daher 10^{26} J/s. Pro Sekunde laufen daher in der Sonne 10^{26} J/$3{,}4 \cdot 10^{-13}$ J ≈ $3 \cdot 10^{38}$ Fusionsvorgänge ab. Alle Achtung!

Hilfe zu A19: Durch die Strahlungsleistung von10^{26} J/s verliert die Sonne jede Sekunde die Masse $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{10^{26}\ \mathrm{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/s^2} \approx 10^9\ \mathrm{kg}$. Es gilt $\rho = M/V$, und die Dichte ρ von Wasser beträgt rund 1000 kg/m³. Das Volumen eines Würfels ist $V = a^3$. Daher gilt $\rho = M/V = M/a^3$ und somit $a = \sqrt[3]{M/\rho} = \sqrt[3]{10^9\ \mathrm{kg}/(10^3\ \mathrm{kg/m^3})} = \sqrt[3]{10^6\ \mathrm{m}^3} = 100\ \mathrm{m}$.

Hilfe zu A20 a: Darunter versteht man die potenzielle Energie eines einzigen Elektrons, wenn dieses im Spannungsfeld von 1 V verschoben wird. Seine Energie beträgt dann $E_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{eV}$.

Hilfe zu A20 b: Die Bindungsenergie eines Deuterons beträgt $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ J und somit $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ J/($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J/eV) = daher $2{,}13 \cdot 10^6$ eV. Die Bindungsenergie von Kernen ist also um den Faktor 10^5 bis 10^6 größer als die Bindungsenergie in Molekülen, die nur einige eV beträgt. Daher sind Kernumwandlungsprozesse auch wesentlich energiereicher als chemische Prozesse.

Hilfe zu A 21: Beim „Zusammenbau" eines U-235-Kerns beträgt der Massendefekt etwa 0,8 %, bei mittelschweren Kernen aber etwa 0,9 %. Wenn in 1 kg U-235 alle Kerne zerfallen sind, hat sich die Masse somit um etwa 0,1 % oder 1 g verringert. Die freigesetzte Energie beträgt daher $E = mc^2 = 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 9 \cdot 10^{13}$ J. Ein kg Heizöl hat einen Brennwert von $4 \cdot 10^7$ J. Der "Brennwert" von einem kg Uran ist daher um den Faktor $9 \cdot 10^{13}$ J/$4 \cdot 10^7$ J ≈ $2 \cdot 10^6$ größer. Wie kann man das erklären? Die Bindungsenergie von Kernen ist um den Faktor 10^5 bis 10^6 größer als die Bindungsenergie in Molekülen. Daher sind Kernumwandlungsprozesse auch wesentlich energiereicher als chemische Prozesse (siehe auch A20 b).

ISBN: 978-3-209-08538-2