Mathematik verstehen 4

Fit für die 4. Klasse

Das Einstiegskapitel soll auch in Band 4 für die Lernenden ein Anlass dafür sein, sich mit den wesentlichen Bereichen aus dem vergangenen Schuljahr zu beschäftigen. Das nicht nummerierte Kapitel steht außerhalb des eigentlichen Lehrplans für die 8. Schulstufe und stellt Grundlegendes aus den Inhaltsbereichen *Zahlen und Maße* sowie *Variablen, funktionale Abhängigkeiten* in den Vordergrund. Aufgaben in diversen Formaten (Ausfüllen, Multiple-Choice-Aufgaben, Textaufgaben, einfache Rechenaufgaben, Lückentexte, Zuordnungsaufgaben etc.) zu ganzen und rationalen Zahlen, zu Potenzen, Variablen und Termen auch in geometrischen Zusammenhängen sollen die Schülerinnen und Schüler auf den neuen Lernstoff vorbereiten.

Die weiteren Kapitel sind durchnummeriert. Die Aufgabennummern sind so konzipiert, dass die jeweilige Kapitelnummer vor dem Punkt erkennbar ist, zB im Kapitel 1 Aufgaben wie 1.72, im Kapitel 2 Aufgaben wie 2.46 usw. Dies hat den Vorteil der besseren Orientierung und Zuordnung im Lehrbuch bereits anhand der Aufgabennummern und im Unterricht beim Angeben von Schul- und vor allem Hausübungsaufgaben.

1 Reelle Zahlen

Mit der Einführung der Menge der rationalen Zahlen in der siebenten Schulstufe ist bereits der Grundstein für jene Vorstellung gelegt, dass auf der Zahlengeraden zwischen zwei Zahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen. Diese Vorstellung muss nun in anschaulicher Weise dahingehend übertroffen werden, dass die rationalen Zahlen immer noch nicht ausreichen, um die Zahlengerade vollständig zu machen. Daher steht am Anfang des Kapitels eine Hinführung zu dieser Thematik einerseits im Ermitteln von Seitenlängen zu Quadraten mit unterschiedlichen Flächeninhalten, wobei hier die Maßzahlen der Seitenlängen der ersten beiden Quadrate bereits bekannten Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$) zuzuordnen sind, für die Maßzahl der Seitenlänge des dritten Quadrats gilt dies jedoch nicht. In der zweiten Einführungsaufgabe soll die Dezimaldarstellung zweier Zahlen im Vordergrund stehen. All diese Erkenntnisse bedenkend kann nun behutsam mittels Unterscheidung von rationalen und irrationalen Zahlen auf eine Definition der Menge der reellen Zahlen hingesteuert werden. Die im Anschluss folgenden Aufgaben sollen diese Unterscheidung in diversen Zusammenhängen und Aufgabenformaten untermauern.

In der Kenntnis der Menge $\mathbb{R}$ kann nun auf das Wissen zu Quadratwurzeln aus der siebenten Schulstufe aufgebaut werden. Nun erst ist es möglich, die Wurzel aus einer positiven reellen Zahl genau zu beleuchten. Dabei ist die Unterscheidung unabdingbar, dass hierbei eine natürliche, eine positive rationale oder eine positive irrationale Zahl als Wurzel vorliegen kann. (Dies war bislang nicht möglich, da die Menge $\mathbb{R}$ in der siebenten Schulstufe nicht thematisiert wird.) Der Begriff der Quadratzahl wird eingeführt, zudem werden einige Aspekte höherer Wurzeln vorgestellt und anhand von Aufgaben erarbeitet. Anschließend sollen die Grundrechenarten mit Wurzeln eingeübt und das partielle Wurzelziehen zum Zweck der Vereinfachung von Termen präsentiert werden. Hier soll besonderes Augenmerk auf die Umformungsschritte gelegt werden, da der Umgang mit Wurzeln auch in höheren Klassen immer noch eine beträchtliche Fehlerquelle darstellt, der durch konsequentes Üben in der achten Schulstufe erfolgreich begegnet werden kann.

Reelle Zahlen als Längen und als Punkte auf der Zahlengeraden sind wichtige Vorstellungen, die es den Schülerinnen und Schülern erleichtern sollen, in diversen Kontexten die Menge $\mathbb{R}$ als selbstverständliche Grundlage vieler Überlegungen beim Problemlösen heranzuziehen. Die Aufgaben zu diesem Abschnitt sind jedoch ganz bewusst der Kategorie „Erweiterung und Vertiefung“ zugeordnet, da deren gründliche Bearbeitung einer intensiven Auseinandersetzung mit mathematischen Modellen und den Bezügen zur Möglichkeit in der Anwendung bedarf.

Zu den Grundlagen hingegen zählt der folgende Abschnitt zum sinnvollen Runden und zum beliebig genauen Nähern mittels Schranken, da dieser Bereich den alltäglichen Umgang mit Maßen umfasst. Den Schülerinnen und Schülern soll bewusst werden, dass das Angeben von Zahlen auf viele Nachkommastellen keineswegs genaues Arbeiten impliziert, im Gegenteil: Der Situationszusammenhang muss immer im Blickfeld bleiben, da andernfalls

Ergebnisse missverständlich oder im schlimmsten Fall wertlos sein könnten. Zum ersten Mal wird dafür der Begriff des Intervalls in der Mathematik bemüht, der in den weiteren Schulstufen noch eine bedeutende Rolle spielen wird.

Im nächsten Abschnitt werden die bereits bekannten Grundgesetze erstmalig für reelle Zahlen definiert. Dies mag für Schülerinnen und Schüler müßig erscheinen, da zunächst kaum erkannt werden könnte, dass im Zug einer Zahlbereichserweiterung eine Überprüfung der bislang geltenden Rechengesetze erforderlich ist. Dies sollte unter Umständen vielleicht anhand von Aufgabe 1.97d thematisiert werden, da es nicht so leicht zu verstehen ist, dass der Quotient zweier irrationaler Zahlen auch eine natürliche Zahl sein kann. Die folgenden Aufgaben festigen diese Vorstellungen. Eine Übersicht über die Zahlbereiche schließt die Lernabschnitte zu diesem Kapitel ab.

Für interessierte Schülerinnen und Schüler bietet sich der Abschnitt 1.9 MERKwürdiges an, in dem bereits das Thema der komplexen Zahlen als weitere Zahlbereichserweiterung angesprochen wird.

2 Variablen, Terme, Gleichungen

Seit der fünften Schulstufe sind Variablen, Terme und Gleichungen wesentliche Bereiche des Lehrstoffs, in jedem Schuljahr gesellen sich weitere Gesichtspunkte zu den bereits erworbenen Vorstellungen und Kenntnissen, die an die jeweilige Altersstufe angepasst immer abstraktere Denkprozesse bei den Schülerinnen und Schülern verlangen. So banal der erste Lernabschnitt in diesem Kontext erscheinen mag, so überaus fundamental ist er jedoch. Das Erkennen von Grobstrukturen und Feinstrukturen in Termen ist unerlässlich für das Arbeiten mit Termen und Gleichungen vor allem auch im Hinblick auf höhere Schulstufen, da Vereinfachungen und Möglichkeiten des Weiterarbeitens mit Termen, Lösungen von Gleichungen sowie das Erkennen von strukturellen Zusammenhängen davon abhängen, ob und wie erweitert, gekürzt, herausgehoben, ausmultiplizert bzw. anders umgeformt werden darf. Die Vorstellung, einen komplizierten Term wie eine Matrjoschka-Puppe zu betrachten, kann auch später bei diversen Regeln zum Ableiten von Funktionen (Kettenregel) wieder angewendet werden. Viele Aufgaben in diversen Formaten sollen den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bieten, hier die notwendigen Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erwerben und zu festigen.

Diese Grundkenntnisse sind wesentliche Voraussetzungen dafür, dass erfolgreich mit Termen gearbeitet werden kann. Der folgende Lernabschnitt stellt in jedem Unterabschnitt Musteraufgaben voran, die besonders die ganz konkrete Vorstellung ansprechen, obgleich es sich hier um einen höchst formalen Inhaltsbereich handelt. Dies gilt nun für das grundlegende Arbeiten mit Potenzen und darauf aufbauend für das Multiplizieren von ein- und mehrgliedrigen Termen. Auch hier kann der Vorstellung mit geometrischen Veranschaulichungen geholfen werden. Die binomischen Formeln werden in der achten Schulstufe besonders dahingehend vertieft, dass zB in der Formel $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ die beiden Summanden A und B nicht nur für eine Zahl oder für eine Variable stehen können, sondern für einen komplizierteren Term, bei dem das Strukturverständnis von Termen zum Einsatz kommen kann.

Das Arbeiten mit Bruchtermen setzt voraus, dass ein Bruchterm korrekt definiert werden kann. Diese Definition steht nach einer einfachen Musteraufgabe am Beginn des nächsten Lernabschnitts. Das Erkennen von Termstrukturen wird beim Anwenden des Produkt-null-Satzes zu einer wesentlichen Komponente, denn dieser ist auch in höheren Schulstufen immer wieder notwendig, um zweckmäßige Aussagen über Lösungen von Gleichungen zu treffen oder um diese Lösungen zu ermitteln. Aufgaben aus unterschiedlichen Handlungsbereichen unterstützen das Ausbilden von Grundfertigkeiten im Umgang mit den Voraussetzungen für Bruchterme, dh. mit den Möglichkeiten zu erkennen, für welche Zahlen ein Bruchterm nicht definiert ist. Vor allem beim Erweitern und Kürzen spielen abermals Termstrukturen eine essentielle Rolle, ohne das manche Grundrechenarten bei Bruchtermen nicht durchführbar wären. Alle Grundrechenarten mit Bruchtermen werden anhand von Musteraufgaben vorgeführt, notwendige Regeln werden angegeben, viele Aufgaben, anhand derer diese Regeln eingeübt werden können, folgen im Anschluss.

Kenntnisse im Umgang mit Bruchtermen vorausgesetzt widmet sich der nächste Abschnitt den Gleichungen mit Bruchtermen. Anhand der Musteraufgabe 2.112 werden die Elementarumformungsregeln sukzessive angeführt und dabei wird jeder Umformungsschritt dargestellt. In den Aufgaben 2.113, 2.114 und 2.115 sind weitere Möglichkeiten erklärt, wie man Gleichungen mit Bruchtermen elegant lösen kann (kreuzweises Ausmultiplizieren, Gleichheit der Nenner der Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens bedeutet Gleichheit der Zähler dieser Terme, bei Gleichheit von Bruchtermen gilt auch Gleichheit der Kehrwerte dieser Bruchterme). In den folgenden

Aufgaben sollen Gleichungen nicht nur gelöst, sondern zunächst auch aufgestellt werden (siehe Aufgabe 2.116); Elementarumformungsregeln sollen ganz bewusst angewendet werden (siehe Aufgaben 2.121 und 2.122). Zudem wird an Musteraufgaben erläutert, dass auch die Möglichkeit besteht, dass unendlich viele reelle Zahlen Lösungen einer Gleichung mit Bruchtermen sein können oder keine reelle Zahl Lösung einer solchen Gleichung sein kann. Aufgaben hierzu sind im Anschluss zu finden.

Der nächste Lernabschnitt setzt sich mit mathematischen Modellen auseinander. Dabei werden Ungleichungen und deren Umformungen thematisiert, Genauigkeitsuntersuchungen sollen anhand von alltagsrelevanten Situationen durchgeführt werden, die Problematik des Aufteilens und des zugehörigen Aufstellens einer passenden Gleichung wird anhand einer Musteraufgabe vorgestellt und danach in Form von Aufgaben in anschaulichen Kontexten zum weiteren Üben angeboten, Aufgaben zu Mischungen, Bewegung und Geschwindigkeit, Arbeit und Zeit, aus der Geometrie und anhand von Formeln folgen in ähnlicher Weise. Dadurch soll den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden, dass die Fertigkeiten mit Gleichungen umzugehen in vielen Situationen des Alltags eine bedeutende Rolle einnehmen.

Der Abschnitt 2.8 MERKwürdiges bietet interessierten Schülerinnen und Schülern bereits einen Ausblick auf den Typ der quadratischen Gleichungen und Hinweise zu deren Lösungen.

3 Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen

In diesem Lehrwerk ist das Kapitel „Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen" aus guten Gründen vor dem Kapitel „Funktionen" gereiht: Die Vorstellung, dass eine lineare Gleichung in einer Variablen von der Form $a \cdot x + b = 0$ (mit $a \neq 0$) stets die Lösung $x = -\frac{b}{a}$ hat, sollte bereits bekannt sein, dass bei Gleichungen mit Bruchtermen auch die Fälle eintreten können, dass keine Zahl oder dass jede Zahl im Definitionsbereich Lösung der Gleichung sein kann, ist im vorigen Kapitel thematisiert worden; dass eine Gleichung in zwei Variablen nun jedoch eine neue Situation hinsichtlich der Lösungen darstellt, bedarf einer anderen Vorstellung, die zu unpräzisen bzw. falschen Assoziationen führen würde, wären bereits die Grundlagen der Funktionenlehre bekannt. Der Unterschied zwischen zwei gleichberechtigten Variablen bei einer Gleichung würde mit der grundlegenden Idee einer Ausgangsgröße und einer eindeutig zugeordneten Größe bei Funktionen verschwimmen. Außerdem sind nicht alle Lösungsmengen linearer Gleichungen in zwei Variablen als Funktionsgraphen aufzufassen. Zudem steht bei den Gleichungen in zwei Variablen in diesem Lehrwerk nicht im Vordergrund, die grafische Darstellung der Lösungsmenge im Hinblick auf ein Steigungsmaß zu entwerfen. Es geht mehr um die Übersetzung von alltäglichen Problemstellungen in eine mathematische Form, eine Gleichung oder ein Gleichungssystem in zwei Variablen, deren Lösung(en) im Focus der Betrachtungen steht (stehen).

In diesem Sinn wird in der Einführungsaufgabe 3.01 und in deren Fortsetzung 3.02 bewusst ein behutsames Heranführen mit der Möglichkeit der gründlichen Überlegung geboten, wie eine Problemstellung des Alltags mathematisch dargestellt werden kann. Wie selbstverständlich kann hier erkannt werden, dass nicht nur eine Zahl als Lösung, sondern stets ein Zahlenpaar als Lösung auftritt, und dass davon sinnvollerweise mehrere existieren können. Der Definition einer Gleichung in zwei Unbekannten folgt dann die ebenso sorgsame Heranführung an mögliche grafische Lösungen, wobei aufgrund des Situationszusammenhangs zwischen einer Darstellung mit Punkten, die entlang einer Geraden liegen, und einer Darstellung einer Geraden (bzw. eines Ausschnitts einer Geraden) ganz bewusst unterschieden wird. Die beiden Musteraufgaben 3.03 und 3.04 verdeutlichen diese Notwendigkeit der Unterscheidung. Es empfiehlt sich, für diese vier Musteraufgaben sowie für einige analoge Aufgaben im Anschluss viel Zeit einzuplanen, da hiermit die Grundlage für das Verständnis der Lösungsmenge einer linearen Gleichung in zwei Variablen gelegt wird, welcher nicht nur bei den Gleichungssystemen, sondern auch bei Aufgaben in höheren Schulstufen Rechnung getragen werden wird. Erst nach dieser Begegnung mit Alltagsbezügen wird die rein mathematische Sichtweise präsentiert, wobei die Zahlenpaare $(x \mid y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angenommen und Spezialfälle angesprochen werden. Im Anschluss folgen Aufgaben aus mehreren Handlungsbereichen.

Der folgende Lernabschnitt thematisiert die Option bei Vorhandensein einer zweiten Gleichung in zwei Variablen, also bei einer zusätzlichen Information zum gegebenen Kontext, ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen aufzustellen. Anhand der anschaulichen Musteraufgabe 3.17 kann erkannt werden, dass aufgrund des Vorliegens einer zweiten Gleichung ein einziges Zahlenpaar für die genannte Situation als Lösung in Frage kommt. Die Schreibweise mit einer geschwungenen Klammer, welche die beiden Gleichungen umfasst, soll verdeutlichen, dass die beiden Gleichungen zusammengehören und ein System bilden, das als Ganzes gelöst werden soll. Selbstverständlich wird danach auch vorgestellt, dass die Existenz einer zweiten derartigen Gleichung nicht automatisch dazu führt, dass die Lösung genau ein Zahlenpaar ist. Veranschaulicht wird dies anhand der grafischen Darstellung der beiden Lösungsmengen: Zwei Geraden können wie in Aufgabe 3.17 einander schneiden, parallel und verschieden sein oder parallel sein und zusammenfallen; damit sind alle Möglichkeiten der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in zwei Variablen aufgezeigt. Deshalb wird zunächst auch in den folgenden Aufgaben mit der grafischen Lösungsmethode gearbeitet. Erst im nächsten Unterabschnitt werden die rechnerischen Methoden anhand von detaillierten Erläuterungen und von Musteraufgaben vorgestellt; dabei werden alle Lösungsfälle erwähnt und ausgeführt. Die Aufgaben im Anschluss sind analog dazu und dienen dazu, Fertigkeiten im Lösen von Gleichungssystemen zu erwerben. Bei den Textaufgaben bietet sich natürlich der sinnvolle Einsatz von Technologie an, vor allem um die grafische Situation zu veranschaulichen, aber auch um eine rechnerische Kontrolle durchzuführen; den Schülerinnen und Schülern sollte nicht vorenthalten werden, dass auch beim Lösen vor allem komplizierter linearer Gleichungssysteme die Technologie ihren begründeten Einsatz erfahren kann. Bei einzelnen Anwendungsaufgaben aus den Bereichen Geometrie, Wirtschaft und Bewegungen kann der technologische Einsatz seine Notwendigkeit haben.

Für interessierte Schülerinnen und Schüler bietet der Abschnitt 3.4 MERKwürdiges eine Einführung in den Themenbereich von Matrizen, die ja im Lehrplan der AHS weder in der Unter- noch in der Oberstufe vorhanden, aber aus vielen wissenschaftlichen Bereichen nicht wegzudenken sind.

4 Funktionen

Anders als im vorigen Kapitel steht am Anfang der Ausführungen der Zuordnungsbegriff im Vordergrund. Die Einführungsaufgabe 4.01 fordert wieder einmal ganz bewusst das konkrete Handeln der Schülerinnen und Schüler, damit in der Experimentiersituation schon zu Beginn klar wird, dass einem Zeitpunkt nur eine einzige Höhe des Turms aus Münzen zugeordnet werden kann. Diese Eindeutigkeit der Zuordnung wird auch in den Aufgaben 4.02 und 4.03 verdeutlicht; hier kommt zusätzlich eine grafische Darstellung zum Einsatz, die bereits in den vorigen Schulstufen bei direkter und indirekter Proportionalität einen Zusammenhang hinsichtlich der Zuordnung zweier Größen geboten hat. Der Text im Anschluss an die drei Einführungsaufgaben, welcher die Definition einer reellen Funktion umrahmt, ist grundlegend für das weitere Verständnis von Funktionen und sollte auf jeden Fall gemeinsam im Unterricht gelesen und besprochen werden. Die folgenden Aufgaben festigen diese neuen Kenntnisse mittels aller vier Handlungsbereiche.

Der nächste Abschnitt widmet sich den Eigenschaften eines Funktionsgraphen. Die beiden Musteraufgaben 4.12 und 4.13 veranschaulichen einerseits, wie eine solche Zuordnung grafisch zu gestalten ist, andererseits wird bereits der Handlungsbereich des Argumentierens zum Zweck der genaueren Auseinandersetzung mit der Grafik bemüht. Erklärungen zu den beiden Aufgaben führen dann zur Definition des Graphen einer Funktion. Die Aufgaben im Anschluss gestalten sich vielfältig, sie bedienen alle Handlungsbereiche und so manchen außermathematischen Kontext. All diese Aufgaben sollen Grundvorstellungen zu Funktionen entwickeln (auch mithilfe elektronischer Hilfsmittel), die in weiterer Folge das Verständnis erleichtern.

Erst im folgenden Lernabschnitt wird mit einer Ausgangsgröße der Term einer zugeordneten Größe gebildet. Dies geschieht zunächst dadurch, dass in der Musteraufgabe 4.22 wie schon in den vorangegangenen Abschnitten mit einer Tabelle und einem Funktionsgraphen die eindeutige Zuordnung veranschaulicht wird. Erst in der dritten Teilaufgabe wird ein Term für die zugeordnete Größe verlangt. Die folgenden Begriffserläuterungen sind unerlässlich dafür, dass in weiterer Folge Aufgabenstellungen richtig verstanden und Aufgaben korrekt bearbeitet werden können. Die Bezeichnungen „Argument" bzw. „Stelle" sowie „Funktionswert an einer bestimmten Stelle" müssen im Fachvokabular der Schülerinnen und Schüler einen prominenten Rang einnehmen. Dasselbe gilt für die oft oberflächlich behandelte Unterscheidung zwischen f und f(x); es ist f der Name der Funktion und f(x) der Funktionswert an der Stelle x, also eine Zahl. Häufig wird fälschlicherweise von der „Funktion f(x)" gesprochen, was einen Widerspruch hervorruft, da eine Zahl keine Funktion sein kann. In diesem Lehrwerk wird zudem eine Funktionsgleichung meist als Termdarstellung bezeichnet. Der Grund dafür liegt darin, dass zB $f(x) = 5x + 3$ einem Funktionswert an der Stelle x der zugehörige Funktionsterm gleichgesetzt wird, bei einer Funktionsgleichung hingegen könnte man annehmen, dass beliebige Äquivalenzumformungen durchführbar wären; das ist auch so, nur lässt sich über die Sinnhaftigkeit einer umgeformten „Funktionsgleichung" etwa in der Form $\frac{f(x)-3}{x} = 5$ streiten. Der Begriff Funktionsgleichung wird zwar erwähnt, dennoch wird aus den genannten Gründen die Bezeichnung Termdarstellung präferiert. Ebenso wichtig ist es, dass immer nur von **einer** Termdarstellung die Rede sein kann, da es viele mögliche Darstellungen für den Funktionsterm und somit auch viele Möglichkeiten einer Termdarstellung ein und derselben Funktion gibt. Die folgenden Aufgaben sollen diesen neu erlernten Begriffe (auch wieder mithilfe elektronischer Hilfsmittel) bei den Schülerinnen und Schülern festigen.

Der Abschnitt 4.4 hat die linearen Funktionen zum Gegenstand. Hier wird zu Beginn mit der direkten Proportionalität auf bereits Bekanntes zurückgegriffen. Als Funktion betrachtet wird einem Argument eindeutig ein Funktionswert zugeordnet, deren Graph die Eigenschaft hat, dass dieser eine Gerade ist, die durch den Punkt $(0 \mid 0)$ verläuft; die Termdarstellung einer direkten Proportionalitätsfunktion ist von der Form $f(x) = k \cdot x$ mit $k \neq 0$. Weitere Begriffe und Eigenschaften werden erläutert und anhand von Aufgaben gefestigt. Die allgemeine lineare Funktion von der Form $f(x) = k \cdot x + d$ wird in der Musteraufgabe 4.40 vorgestellt und deren Eigenschaften im Vergleich zur direkten Proportionalitätsfunktion thematisiert. Dabei soll k als Maß für die Steigung der Funktion und d als Funktionswert an der Stelle 0 erkannt werden. Die Vorstellung, dass d ein „Abstand" vom Ursprung des Koordinatensystems zum Schnittpunkt mit der 2. Achse sei, sollte deshalb vermieden werden, da ein Abstand stets positiv ist, d aber auch negative Werte annehmen kann; mit $d = f(0)$ lassen sich derart missverständliche Auffassungen vermeiden. Weiters wird der Sonderfall einer konstanten Funktion vorgestellt und die Begrifflichkeit wird näher erläutert.

Dieses Lehrwerk verzichtet auf die widersprüchlichen Bezeichnungen „homogene lineare Funktion" und „inhomogene lineare Funktion" aus folgendem Grund: Eine Funktion f ist linear, wenn Additivität, also $f(x + y) = f(x) + f(y)$, und Homogenität, also $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, erfüllt sind. Daher ist prinzipiell nur eine Funktion f mit $f(x) = k \cdot x$ $(k \in \mathbb{R})$ linear und dementsprechend bezeichnet man im Hochschulbereich Funktionen f mit $f(x) = k \cdot x$ $(k \in \mathbb{R})$ als linear und mit $f(x) = k \cdot x + d$ $(k, d \in \mathbb{R})$ als affin-linear. In der Schulmathematik hingegen werden alle Funktionen f mit $f(x) = k \cdot x + d$ $(k, d \in \mathbb{R})$ als lineare Funktionen bezeichnet. Eine Unterscheidung in „homogene" und „inhomogene" lineare Funktionen ist jedoch ungeeignet, da eine lineare Funktion stets homogen ist. Eine lineare Funktion als inhomogen zu bezeichnen, ist ein Widerspruch zur Definition. In der Schulmathematik ist es daher sinnvoller, Funktionen f mit $f(x) = k \cdot x$ $(k \in \mathbb{R})$ als direkte Proportionalitätsfunktionen und mit $f(x) = k \cdot x + d$ $(k, d \in \mathbb{R})$ ist als allgemeine lineare Funktionen zu bezeichnen.

Nach vielen Aufgaben, die mehrere Handlungsbereiche bedienen und bei denen elektronische Hilfsmittel als Werkzeug zur Veranschaulichung verwendet werden können und sollen, stehen mit den Steigungsdreiecken ein weiteres Instrument zur Verfügung, welches den Parameter k, also das Steigungsmaß, sehr anschaulich ermitteln lässt. Wichtig ist hier bei negativem k beim Steigungsdreieck $|-k|$ und nicht nur $-k$ anzuschreiben, da eine Streckenlänge, hier die Länge einer Dreiecksseite, nie negativ sein kann. Großes Augenmerk möge auf die Definitionen des linearen Wachsens und des linearen Abnehmens gelegt werden, nicht nur darauf, dass diese auswendig gelernt werden, sondern auch anhand von konkreten linearen Funktionen erklärt und somit verstanden werden. Steigungsdreiecke können hier eine große Hilfe darstellen. Die folgenden Aufgaben sollen die neu erworbenen Kenntnisse absichern und auch Einblick in lineare Kostenfunktionen und Zeit-Ort-Funktionen gewähren. Hier gilt analog zu den linearen Wachstums- und Abnahmevorgängen in Mathematik verstehen 3, dass von Zeit-Ort-Funktionen und nicht missverständlicherweise von Zeit-Weg-Funktionen die Rede ist.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit dem Vergleich linearer Funktionen auf anschauliche Art und Weise. Die Musteraufgabe 4.64 stellt die wesentlichen Aspekte einer solchen Betrachtung vor und die anschließenden Aufgaben lassen eine analoge Bearbeitung in allen Handlungsbereichen zu.

Einige nichtlineare Funktionen, nämlich indirekte Proportionalitätsfunktionen, quadratische Funktionen und Exponentialfunktionen werden kurz vorgestellt, eine intensivere Beschäftigung kann jedoch ausbleiben und auf höhere Schulstufen verschoben werden. Daher sind die Aufgaben auch ausnahmslos dem Erweiterungs- und Vertiefungsbereich zugeordnet. Ähnliches gilt für den letzten Lernabschnitt, in welchem der Modellcharakter von Funktionen anhand einer Musteraufgabe und zweier weiterer Aufgaben thematisiert wird.

Für interessierte Schülerinnen und Schüler bietet der Abschnitt 4.9 MERKwürdiges Aufschlussreiches zum Thema Relationen, was vor allem im Hinblick auf die Unterschiede zu Funktionen durchaus informativ ist.

5 Die pythagoräische Satzgruppe

Bereits aus der siebenten Schulstufe ist der pythagoräische Lehrsatz bekannt, daher bietet die erste Einführungsaufgabe die Chance für die Schülerinnen und Schüler anhand eines fehlerhaften Textes durch genaues Lesen die fünf Fehler zu erkennen und zu korrigieren. Die zweite Einführungsaufgabe dient dazu, bereits vorhandenes Wissen über Dreiecke wieder aufzufrischen und in geeigneter Form zu präsentieren. Danach folgen, nach den wesentlichen Definitionen des pythagoräischen Lehrsatzes und dessen Umformungen vier Musteraufgaben, in denen die essentiellen Problemstellungen der siebenten Schulstufe noch einmal vorgeführt sind und als Wiederholung des Lehrstoffs aufgefasst werden können. In diesem Sinn sind auch die daran anschließenden Aufgaben zu verstehen, wobei hier nicht nur Grundlegendes verlangt, sondern vor allem in der Rubrik „Erweiterung und Vertiefung" eine Mischung aus komplizierteren innermathematischen und außermathematischen Bereichen geboten. Dabei werden alle Handlungs- und Komplexitätsbereiche angesprochen und somit wird die Gesamtsicht auf die Bedeutung des pythagoräischen Lehrsatzes ausgebreitet.

Dem Titel des Kapitels folgend werden erwartungsgemäß nun die weiteren Aspekte der pythagoräischen Satzgruppe behandelt und somit wird nahtlos auf das Basiswissen aufgebaut. Die Musteraufgabe 5.31 bedient sich der Eigenschaften ähnlicher Dreiecke, damit zum einfachen Nachvollziehen der Kathetensatz entwickelt werden kann. In diesem Lehrwerk ist ganz gewollt vom „Kathetensatz" und nicht von „Kathetensätzen" die Rede, da es sich letztlich auch nur um **einen** Satz handelt, der in einem rechtwinkeligen Dreieck auf zwei verschiedene Arten zur Anwendung kommt. Wichtig ist letztlich, dass nicht nur zwei neue Formeln angeführt werden, sondern dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben zu erkennen, wie man durch geometrische Überlegungen und algebraische Umsetzungen zu diesem Satz und damit zu diesen Formeln gelangt. Der Aufgabenteil im Anschluss enthält ebenso Musteraufgaben, in denen die neuen Erkenntnisse in neuen Zusammenhängen vorgestellt und detailliert ausgeführt werden. Auch hierbei werden wieder alle Handlungs- und Komplexitätsbereiche angesprochen.

Der Höhensatz wird auf analoge Weise zum Kathetensatz eingeführt, wobei sich die Musteraufgabe 5.44 ebenso wieder der Vorstellung mit ähnlichen Dreiecken bedient. Daraus folgt die Definition des Höhensatzes in rechtwinkeligen Dreiecken. Der Aufgabenteil enthält eine weitere Musteraufgabe, in der eine Problemstellung mithilfe eines Thaleskreises bearbeitet wird. Diese Idee kann im Anschluss gleich selbstständig eingesetzt werden.

Mit den gewonnenen Fähigkeiten und Fertigkeiten zum pythagoräischen Lehrsatz, zum Kathetensatz und zum Höhensatz widmet sich der folgende Lernabschnitt den Anwendungen der Satzgruppe in ebenen Figuren. In jedem Unterabschnitt steht am Beginn eine Einführungsaufgabe bzw. eine Musteraufgabe, die für die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit bietet, eigene Überlegungen zu den gegebenen Situationen mit den Kenntnissen der pythagoräischen Satzgruppe zu vermengen und auszuführen. Begonnen wird mit Rechteck und Quadrat, allgemeine Dreiecke werden im nächsten Unterabschnitt thematisiert, Parallelogramm und Rhombus, Trapez und Deltoid folgen. Die Aufgaben in jedem Unterabschnitt sind so konzipiert, dass sowohl das Darstellen als auch das Rechnen mit Maßen gefordert ist. Dabei müssen Angaben und grafische Darstellungen genau beleuchtet und interpretiert werden, weiters muss häufig korrekt argumentiert werden.

Der nächste Abschnitt stellt die Betrachtung der Anwendungen der pythagoräischen Satzgruppe bei geometrischen Körpern ins Zentrum. Die beiden Einführungsaufgaben haben das Ziel, die wesentlichen Eigenschaften eines Prismas und der beiden Sonderfälle Quader und Würfel zu wiederholen und zu festigen. Die Definitionen im Anschluss stellen eine Verbindung zwischen dem pythagoräischen Lehrsatz und der Berechnung von Flächen- und Raumdiagonalen her, zudem werden Oberflächeninhalt, Volumen und Masse jeweils durch eine Formel beschrieben. Aufgaben zu allen Handlungsbereichen folgen im Anschluss. Der zweite Unterabschnitt widmet sich den pyramidenförmigen Körpern und deren Zusammensetzungen und Sonderfällen. Auch hier haben die Einführungsaufgaben den Zweck, dass wesentliche Eigenschaften von geometrischen Körpern erkannt und genannt werden. Anwendungen des pythagoräischen Lehrsatzes werden im Theoriekasten vorgestellt, Formeln zu Oberflächeninhalt, Volumen und Masse werden angeführt. Die folgenden Aufgaben sprechen wiederum alle Handlungsbereiche an.

Der letzte Lernabschnitt stellt wesentliche Beweise zur pythagoräischen Satzgruppe vor und eignet sich als Grundlage für vertiefende Betrachtungen oder Referate. In diesem Sinn sind auch die Ausführungen zu den fünf platonischen Körpern im Abschnitt 5.8 MERKwürdiges zu verstehen.

6 Die Kreiszahl π

Dieses Lehrwerk bietet eine Einführung zu Berechnungen an Kreisen, die das praktische Erfahren in den Vordergrund rückt. Da die Zahl π Grundlage all dieser Überlegungen ist, wird zu Beginn ausführlich der Weg beleuchtet, der im Lauf von Jahrhunderten zur Definition dieser besonderen Zahl geführt hat und der die frühen Näherungen und Anwendungen thematisiert. In diesem Sinn soll die erste Einführungsaufgabe 6.01 für die Schülerinnen und Schüler eine haptische Erfahrung bieten, indem sie die Kreise und Papierstreifen aus dem Anhang des Lehrbuchs ausschneiden und selbst eine Erkenntnis gewinnen, wie sich Umfang und Durchmesser eines Kreises zueinander verhalten. Dieses Bastelexperiment hilft, diesen Zusammenhang im wahrsten Sinn des Wortes zu „begreifen", denn auf diese Art lässt sich eine Näherung von π bestmöglich für die Lernenden erfahrbar machen. Eine zweite Möglichkeit, dies anhand eines Experiments zu erkennen, wird in der zweiten Einführungsaufgabe 6.02 vorgestellt. Dabei soll ein Gegenstand mit kreisförmigem Querschnitt auf einen ebenen Fläche abgerollt und somit werden Erkenntnisse zu Umfang und Durchmesser gewonnen werden. Wesentlich dabei ist, dass für die Schülerinnen und Schüler klar wird, dass es nicht auf die Größe eines Kreises oder kreisförmigen Gegenstands ankommt, das Verhältnis von Umfang und Durchmesser des Kreises ist nämlich stets konstant. Mit diesem Wissen kann nun Historisches aufgezeigt und Näherungen können ermittelt werden. Was unter der Kreiszahl π nun zu verstehen ist, wird in den Theoriekästen genannt. Die Aufgaben in diesem Abschnitt sollen diese Betrachtungen teils amüsant, teils experimentell abrunden.

Da nun das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser als bekannt vorausgesetzt werden darf, kann sich der folgende Lernabschnitt den Berechnungen zum Umfang eines Kreises widmen. Eine Formel für den Umfang u bei gegebenem Durchmesser d oder gegebenem Radius r ist aufgrund der Definition der Kreiszahl π schnell hergeleitet. Eine Musteraufgabe und einige weitere Aufgaben dienen dem ersten rechnerischen Umgang mit π.

Aus der Kenntnis, wie man den Umfang eines Kreises berechnet, folgt im nächsten Lernabschnitt die Berechnung der Länge von Kreisbögen. Anschaulich wird anhand zweier Musteraufgaben die Idee vorgeführt, was dann in der Folge zu einer Formel für die Länge b eines Kreisbogens führt. Wichtig in diesem Zusammenhang ist, dass in diesem Lehrwerk primär nicht die durchgekürzte Fassung des Formelterms angeführt wird, da mit $b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2r\pi$ die eigentliche Herleitung besser ersichtlich ist als in der Form $b = \frac{\alpha}{180} \cdot r\pi = \frac{r\pi\alpha}{180}$. Aufgaben zu allen Handlungsbereichen folgen im Anschluss.

Die Beschäftigung mit dem Flächeninhalt eines Kreises bedarf einerseits einer Überlegung, die sich mit dem reinen Abschätzen beschäftigt (siehe Musteraufgabe 6.28), andererseits mit der Methode des Einschrankens, die schon im ersten Lernabschnitt dieses Kapitels herangezogen worden ist (siehe Musteraufgaben 6.03 und hier nun 6.29 sowie 6.30). Auch hier kann man sich dem Flächeninhalt nur annähern, rechnerisch wie durch die geometrische Veranschaulichung der Aufreihung von Kreissektoren zu einer parallologrammähnlichen Figur. Eine Formel für den Flächeninhalt A eines Kreises kann nun jedoch nicht exakt hergeleitet, aber durch Überlegungen näherungsweise dargestellt werden. Das sollte den Schülerinnen und Schülern bewusst sein, aber auch die Tatsache, dass mithilfe anderer mathematischer Verfahren diese Formel exakt bestätigt werden kann. Aufgaben aus allen Handlungsbereichen folgen im Anschluss.

Analog zur Herleitung der Länge eines Kreisbogens mithilfe des Kreisumfangs wird nun im nächsten Lernabschnitt der Flächeninhalt von Kreisteilen mithilfe des Kreisflächeninhalts entwickelt. Am Anfang steht deshalb der Flächeninhalt des Kreisrings, da dieser lediglich auf der Differenz zweier Kreisflächeninhalte beruht. Dies wird in einer Musteraufgabe präsentiert, die Formel wird angeführt (hier wird aus Anschauungsgründen die Variante bevorzugt, in der π nicht herausgehoben wird) und Aufgaben hierzu folgen. Der Flächeninhalt eines Kreissektors wird in Form der Musteraufgaben 6.56 und 6.57 (ähnlich wie die Länge eines Kreisbogens als Anteil des Kreisumfangs) als Anteil am Kreisflächeninhalt vorgeführt. Zudem wird die Möglichkeit hergeleitet, den Flächeninhalt eines Kreissektors nur mithilfe des Radius und der zugehörigen Kreisbogenlänge zu berechnen. Beide Formeln finden sich in den Theoriekästen. Aufgaben aus allen Handlungsbereichen folgen im Anschluss daran. Da der Flächeninhalt eines Kreissegment recht schwierig allgemein anzugeben ist, wird anhand zweier Musteraufgaben detailliert präsentiert, worauf bei der Berechnung zu achten ist. Der Formel im Theoriekasten folgen vereinfachte Formeln für gewisse Zentriwinkelmaße, die Aufgaben danach fallen in die Rubrik „Erweiterung und Vertiefung".

Auf die Kegelschnittslinien verweist der Abschnitt 6.7, in dem sowohl die Bezeichnung verdeutlicht wird als auch kurz Ellipse, Hyperbel und Parabel beschrieben und deren Bedeutung erwähnt wird. Von weiteren Aufgaben wird in diesem Lehrwerk zu diesem Thema abgesehen, da der Lehrplan hierzu keine Veranlassung gibt.

7 Rotationskörper

Ganz bewusst trägt dieses Kapitel die Bezeichnung „Rotationskörper“, damit diese wesentliche Eigenschaft der Möglichkeit der Rotation um eine Achse von Drehzylinder, Drehkegel und Kugel bereits an prominenter Stelle zur Sprache kommt. Schon die Einführungsaufgabe verdeutlicht anhand eines kleinen Experiments die Eigenschaft der drei geometrischen Körper, was hiermit für Schülerinnen und Schüler erfahrbar gemacht werden kann. Der erste Lernabschnitt ist somit ausschließlich der Definition des Begriffs „Rotationskörper“ gewidmet und verweist auf jene drei Körper, die in weiterer Folge behandelt werden.

Begonnen wird im zweiten Lernabschnitt mit dem Drehzylinder und dessen Eigenschaften, in dem der Handlungsbereich Operieren noch keine Rolle spielt. Erst im nächsten Lernabschnitt, der mit der Berechnung des Volumens eines Prismas in einer Musteraufgabe beginnt, wird thematisiert, dass es Gemeinsamkeiten zwischen Prismen und Drehzylindern bezüglich der Formel für das Volumen gibt. Dies wird vor der Nennung der Volumsformel genau gefolgert. Danach stehen vielfältige Aufgaben zur Verfügung, die den Handlungsbereich Operieren als Schwerpunkt haben. Der Oberflächeninhalt des Drehzylinders wird mit einer Einführungsaufgabe 7.34 eingeleitet, die als Partnerarbeit behandelt werden kann. Diese bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, selbst eine Formel für den Oberflächeninhalt aufzustellen bzw. der genauen Anleitung zu folgen. Der Bastelsatz im Anhang des Buches dient bei dieser Aufgabe der Erfahrung des Abschätzens von Maßen. Bei der Nennung der Formel im Theoriekasten wird auf das Herausheben des Faktors $2r\pi$ verzichtet, da andernfalls die hergeleitete Formelstruktur wegfiele. Die Aufgaben im Anschluss haben wiederum den Handlungsbereich Operieren zum Schwerpunkt.

Der nächste zu behandelnde Rotationskörper ist der Drehkegel. Analog zum Drehzylinder werden am Beginn des Abschnitts die Eigenschaften dieses Körpers in den Fokus genommen. Eine Näherung an das Volumen des Drehkegels findet sowohl in der Einführungsaufgabe 7.53 als auch in der Musteraufgabe 7.54 mithilfe des Volumens der Pyramide statt. Ähnlich wie beim Drehzylinder wird hier eine Formel für das Volumen des Drehkegels entwickelt. In abwechslungsreichen und vielschichtigen Bereichen können die Schülerinnen und Schüler daraufhin anhand der Aufgaben Volumsberechnungen durchführen, auch an zusammengesetzten Rotationskörpern, sowie einige Aufgaben zum Interpretieren und Argumentieren bearbeiten. Dem Oberflächeninhalt des Drehkegels können sich die Lernenden dann wieder experimentell annähern, denn im Anhang des Lehrbuchs finden sich genau jene Formen zum Ausschneiden, auf die in Aufgabe 7.75 und den anschließenden Bildern verwiesen wird. Auf diese Art ist es möglich, korrekte Vorstellungen anhand einer kleinen Bastelei zu entwickeln, die Bestand haben. Es folgen zwei Musteraufgaben, danach die Formeln für Mantelflächeninhalt und Oberflächeninhalt des Drehkegels; bei Letzterem wird der Faktor $r\pi$ aus Gründen der Anschauung nicht herausgehoben. Es folgen Aufgaben in mannigfaltigen Kontexten.

Die Eigenschaften einer Kugel sind Gegenstand des nächsten Abschnitts. Das Entwickeln von Vorstellungen und der Umgang mit den notwendigen Begriffen stehen im Zentrum der Theorie und der Aufgaben. Das Volumen einer Kugel wird in diesem Lehrwerk nicht einfach nur per Formel angegeben, sondern die Herleitung beruht auf für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbaren Tatsachen. Die einzige Hürde, die eines Beweises entbehrt, ist das Prinzip von Cavalieri, welches bereits in Mathematik verstehen 3 angesprochen worden ist. Alles andere kann für Lernende der achten Schulstufe in anschaulichen Schritten nachvollzogen werden, womit eine Formel für das Kugelvolumen tatsächlich schrittweise hergeleitet ist. Danach folgen Aufgaben in mehreren Schwierigkeitsgraden. In Kenntnis der Volumsformel kann nun auch eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel annähernd, aber anschaulich hergeleitet werden. Dass für eine Exaktifizierung Mittel der höheren Mathematik notwendig sind, wird erwähnt, eine Formel kann dennoch aufgrund einer Abfolge von Überlegungen angeführt werden. Auch hier folgen Aufgaben in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden und aus allen Handlungsbereichen.

Für sehr interessierte Schülerinnen und Schüler bietet der Abschnitt 7.9 MERKwürdiges einen kurzen Einblick in die sphärische Trigonometrie.

8 Zentralmaße und Streuungsmaße

Das Kapitel aus dem Inhaltsbereich *Statistische Darstellungen und Kenngrößen* bietet neben neuen Begriffen und Erkenntnissen letztlich eine Synopsis zum Bereich der beschreibenden Statistik aus vier Lernjahren. Wichtige grafische Darstellungen werden wiederholt verwendet, bekannte Begriffe werden um andere Termini erweitert, sodass nach der Bearbeitung dieses Kapitels ein Fundament an statistischem Sachverstand bei Schülerinnen und Schülern vorliegen soll.

Der erste Lernabschnitt befasst sich mit den wichtigsten Zentralmaßen und inkludiert in der Einführungsaufgabe zum bereits bekannten arithmetischen Mittel die Wesenszüge von Median und Modus ohne diese beiden Zentralmaße zu benennen. Dadurch soll jedoch der Blick auf den durchdachten Umgang mit Datenmengen geschärft werden, inwieweit welche Analyse im jeweiligen Situationszusammenhang einen Sinn hat. Beginnend beim arithmetischen Mittel, das seit der fünften Schulstufe bekannt ist, werden die Schülerinnen und Schüler anhand einer Musteraufgabe, die Raum zum Argumentieren lässt, mit einer Formel für das arithmetische Mittel sowie mit einem Hinweis zur sinnvollen Interpretation von Daten konfrontiert, der nicht nur für die folgenden Aufgaben von Bedeutung ist, sondern für den Gesamtblick auf die Zweckmäßigkeit im Umgang mit Datenanalysen. Eine erste Erweiterung zum bereits bekannten Zentralmaß sind dann die Ausführungen zum gewichteten arithmetischen Mittel, das in vielen Belangen von statistischen Analysen eine wichtige Rolle einnimmt, was die Aufgaben im Anschluss daran untermauern. Als neues Zentralmaß wird im nächsten Unterabschnitt der Modus vorgestellt, zunächst anhand einer Musteraufgabe und dann in einer Definition, die um einen wesentlichen Hinweis erweitert ist. Schließlich können die Lernenden mithilfe der Aufgaben die Zweckmäßigkeit des Modus erproben, bevor der Median als Zentralwert erläutert wird. Bei den Eigenschaften und Erklärungen zum Median ist der Begriff der geordneten Liste von großer Bedeutung und liegt auch der Definition zwingend zugrunde. Ebenso wird auf das unterschiedliche Ermitteln des Medians hingewiesen, wenn eine gerade oder eine ungerade Anzahl an Daten vorliegt. Die Aufgaben bieten neben der Einübung im Umgang mit dem Median zudem ein Wiedersehen mit dem Stängel-Blatt-Diagramm. Der Unterabschnitt zum Vergleich der drei Zentralmaße stellt den essentiellen Bereich dieses Abschnitts dar, denn erst hier kann von den Schülerinnen und Schülern abverlangt werden, sich aufgrund statistisch elementarer Abwägungen für den sinnvollen Einsatz eines Zentralmaßes zu entscheiden und diese Entscheidung auch immer wieder zu rechtfertigen. In kaum einem anderen Abschnitt findet eine solch substantielle Vernetzung aller Handlungsbereiche statt wie hier.

Der nächste Abschnitt stellt das geometrische und das harmonische Mittel als weitere Zentralmaße anhand von Musteraufgaben und Definitionen vor und bietet anhand von Aufgaben der Rubrik „Erweiterung und Vertiefung" einen Einblick in weitere Möglichkeiten der statistischen Analyse bei geeigneten Rahmenbedingungen.

Abermals mit der geordneten Liste und deren Analyse beschäftigt sich der folgende Abschnitt. Neben dem 2. Quartil, also dem Median, werden nun mit dem 1. und dem 3. Quartil diese Kennzahlen und die Möglichkeiten des Ermittelns anhand einer Musteraufgabe präsentiert. Ebenso wird erläutert, welche Bedeutung den Quartilen hinsichtlich einer sinnvollen Interpretation der Daten zukommen und was auf diese Weise aus einer großen Datenfülle herausgelesen werden kann. Die grafische Umsetzung als Kastenschaubild (Box-Plot), in welchem auch Minimum und Maximum einer Datenmenge eingearbeitet sind, wird als weitere Veranschaulichung demonstriert. Im Unterricht sollte gerade beim Kastenschaubild aufgezeigt werden, wo die Grenzen einer sinnvollen Datenverarbeitung liegen: Nicht alle Datenlisten eignen sich dazu, als Kastenschaubild veranschaulicht zu werden, keinen Sinn hat ein Box-Plot beispielsweise bei einer sehr geringen Datenmenge, bei vielen gleichen Daten und bei Listen mit „künstlich entstandenen" Daten, zB bei Gehältern in einer Firma (etwa 1 400 €, 1 400 €, 2 300 €, 2 300 €, 2 300 €, 2 300 €, 2 300 €, 2 300 €, 2 300 €, 4 000 €); ein symmetrisch anmutendes Kastenschaubild muss nicht zwangsläufig auf eine symmetrisch aufgebaute geordnete Datenliste verweisen, identischen Kastenschaubildern können völlig unterschiedliche Datenlisten zugrunde liegen, die zufälligerweise dieselben fünf Kennzahlen aufweisen etc. Zusätzlich ist in der Schulmathematik das Problem zu konstatieren, dass die Darstellung von Ausreißern nicht vorgesehen ist, auch nicht in den Vorgaben zur schriftlichen Reifeprüfung, was die Aussagekraft eines Kastenschaubild erheblich einengt. (Die Angabe von Ausreißern böte aber ein zweckmäßigeres und teilweise wirklichkeitsgetreueres Bild zum Interpretieren.) Der Einsatz von Kastenschaubildern ist dann sinnvoll, wenn bei metrischen Merkmalen viele Messwerte vorliegen, zB Körpergrößen, Massen etc. Bei Testergebnissen hat ein Boxplot nur dann Sinn, wenn eine große Spannweite der zu erreichenden Punkte vorliegt. Aussagen müssen stets Begriffe wie „ca.", „etwa", „ungefähr" etc. beinhalten, damit sie als richtig eingestuft werden können, zB: „Ca. 50 % der Daten reichen vom 1. bis zum 3. Quartil." Zudem sollten zwei oder drei Boxplots in einer Aufgabe zum Vergleich stehen.

Der Abschnitt zum Thema Streuungsmaße stellt ein zusätzliches Potential der Interpretation von Daten vor, wenn Zentralmaße allein keine aussagekräftige Auslegung zulassen. Dies verdeutlicht die Musteraufgabe 8.75 eindrucksvoll. Auch deren Fortsetzung (Musteraufgabe 8.76) stellt die Schülerinnen und Schüler vor eine Herausforderung, da ein einfacher Streuungswert bei dieser Problemstellung auch nicht weiterführt. Erst in Musteraufgabe 8.77 wird mit der empirischen Standardabweichung ein Streuungsmaß präsentiert, dem eine Aussagekraft nicht abgesprochen werden kann. Bei der Definition von „empirischer Varianz" und „empirischer Standardabweichung" darf das Adjektiv „empirisch" auf keinen Fall weggelassen werden, da „Varianz" und „Standardabweichung" in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren vorgesehenen Platz einnehmen. Aufgaben hierzu, deren Bearbeitung auch unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel erfolgen kann und soll, folgen im Anschluss.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit dem Vergleich von Merkmalen, greift also auf Bekanntes aus der siebenten Schulstufe zurück und verbindet dies mit einer grafischen Veranschaulichung, dem Streudiagramm, dem ebenso wesentliche Eigenschaften einer Datenmenge zu entnehmen sind. Eine ausführlich gestaltete Musteraufgabe und eine darauf folgende Definition leiten einen Reigen von Aufgaben aus diversen Alltagsbereichen ein, welche den Lernenden die Möglichkeit bieten, Daten darzustellen und diese eingehend zu interpretieren.

Der Abschnitt 8.7 MERKwürdiges widmet sich dem Intelligenzquotienten, der Definition und Ermittlung desselben und vermittelt einen kurzen Einblick in das Thema Intelligenztests.

9 Zusammenfassung des Lernstoffs

Dieses Kompendium beinhaltet die wesentlichen theoretischen Aspekte der Lernstoffs der letzten vier Jahre, dh. der fünften, sechsten, siebenten und achten Schulstufe. Es dient den Schülerinnen und Schülern als Gesamtüberblick über das, was am Ende der achten Schulstufe als Vorbereitung für weitere Schulstufen vorausgesetzt werden kann und muss. Als Nachschlagewerk ist das Kapitel in die vier Inhaltsbereiche gemäß den Bildungsstandards eingeteilt.

10 Aufgaben zu den Bildungsstandards

Das letzte Kapitel ist einerseits als Wiederholung des Lernstoffs mittels Aufgaben und andererseits als Vorbereitung für Bildungsstandardstests zu verstehen. Zu jedem Inhaltsbereich finden sich vielfältige Aufgaben aus allen Handlungs- und Komplexitätsbereichen, die bei allen Aufgaben angeführt und die überwiegend in den Formaten der Bildungsstandardsaufgaben gehalten sind. Der Lernstoff aus vier Unterrichtsjahren kann so im Unterricht selbst, als Hausübung, als individuelles Arbeiten im Auswahlverfahren oder als Partnerarbeit getestet werden. Hier steht nicht mehr der Charakter einer Lern- bzw. Übungsaufgabe im Vordergrund, sondern der einer Testaufgabe.