

# 9 Technologieeinsatz bei der schriftlichen Reifeprüfung

## T 9.01 Maturaufgabe: Gleichungen<sup>1</sup>

Gegeben sind fünf Gleichungen in der Unbekannten  $x$ .

**Aufgabenstellung:** Welche dieser Gleichungen besitzt/besitzen zumindest eine reelle Lösung? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

$2x = 2x + 1$	<input type="checkbox"/>
$x = 2x$	<input type="checkbox"/>
$x^2 + 1 = 0$	<input type="checkbox"/>
$x^2 = -x$	<input type="checkbox"/>
$x^3 = -1$	<input type="checkbox"/>

### Bearbeitung mit Technologie:

Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten mit dem Befehl „Löse“ im CAS lösen.

The screenshot shows the GeoGebra CAS interface with the following content:

Equation	Command	Solution
1	Löse[ $2x=2x+1$ ]	$\{\}$
2	Löse[ $x=2x$ ]	$\{x = 0\}$
3	Löse[ $x^2+1=0$ ]	$\{\}$
4	Löse[ $x^2=-x$ ]	$\{x = -1, x = 0\}$
5	Löse[ $x^3=-1$ ]	$\{x = -1\}$

Callout boxes provide the following instructions:

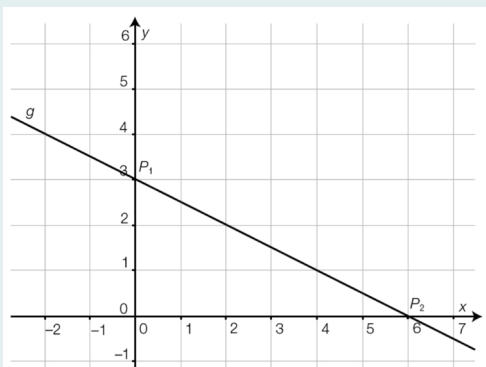
- Top Callout:** CAS: Gib Löse[ $2x = 2x + 1$ ] in die erste Zeile ein und bestätige mit Enter! Alternativ kann man zunächst auch nur die Gleichung eingeben und anschließend das Werkzeug „Löse“  $x =$  verwenden.
- Middle Callout:** CAS: GeoGebra gibt die Lösungsmenge aus, in diesem Fall also die leere Menge.
- Bottom Callout:** CAS: Gib nacheinander auch die anderen Gleichungen ein und löse sie!

Man erkennt, dass die zweite, die vierte und die fünfte Gleichung je zumindest eine reelle Lösung besitzen. Kreuze also die entsprechenden Gleichungen an!

<sup>1</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 1, Grundkompetenz AG 2.3, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.02 **Maturaufgabe: Gleichungssystem<sup>2</sup>**

Eine Teilmenge der Lösungsmenge einer linearen Gleichung wird durch die nachstehende Abbildung dargestellt. Die durch die Gleichung beschriebene Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , deren Koordinaten jeweils ganzzahlig sind.



**Aufgabenstellung:** Die lineare Gleichung und eine zweite lineare Gleichung bilden ein lineares Gleichungssystem. Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Hat die zweite lineare Gleichung die Form            ①           , so            ②           .

①	
$2x + y = 1$	<input type="checkbox"/>
$x + 2y = 8$	<input type="checkbox"/>
$y = 5$	<input type="checkbox"/>

②	
hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen	<input type="checkbox"/>
ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{-2   4\}$	<input type="checkbox"/>
hat das Gleichungssystem keine Lösung	<input type="checkbox"/>

**Bearbeitung mit Technologie:**

1 2 3 4  
**Grafik:** Zeichne die Punkte  $P_1 = (0 | 3)$  und  $P_2 = (6 | 0)$ !

1 2 3 4  
**Werkzeugleiste/Grafik:** Wähle das Werkzeug „Gerade“, zeichne die Gerade durch die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und benenne sie in  $g$  um!

1 2 3 4  
**Eingabe/Grafik:** Gib nun nacheinander die linearen Gleichungen  $2x + y = 1$ ,  $x + 2y = 8$  und  $y = 5$  ein! GeoGebra zeichnet die entsprechenden Geraden und nennt sie  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

1 2 3 4  
**Grafik:** Die Geraden  $a$  und  $g$  haben einen Schnittpunkt verschieden von  $(-2 | 4)$ . Das kann also nicht die Lösung sein. Die Geraden  $b$  und  $g$  liegen parallel, das entsprechende Gleichungssystem hat dann keine Lösung. Kreuze also diese Kombination an!  
 (Überlege zur Sicherheit: Die Geraden  $c$  und  $g$  haben ebenfalls einen Schnittpunkt verschieden von  $(-2 | 4)$ . Das kann also ebenfalls nicht die Lösung sein.)

<sup>2</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 2, Grundkompetenz AG 2.5, kostenloser Download: www.bifie.at/node/80

### T 9.03 Maturaufgabe: Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse<sup>3</sup>

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g:

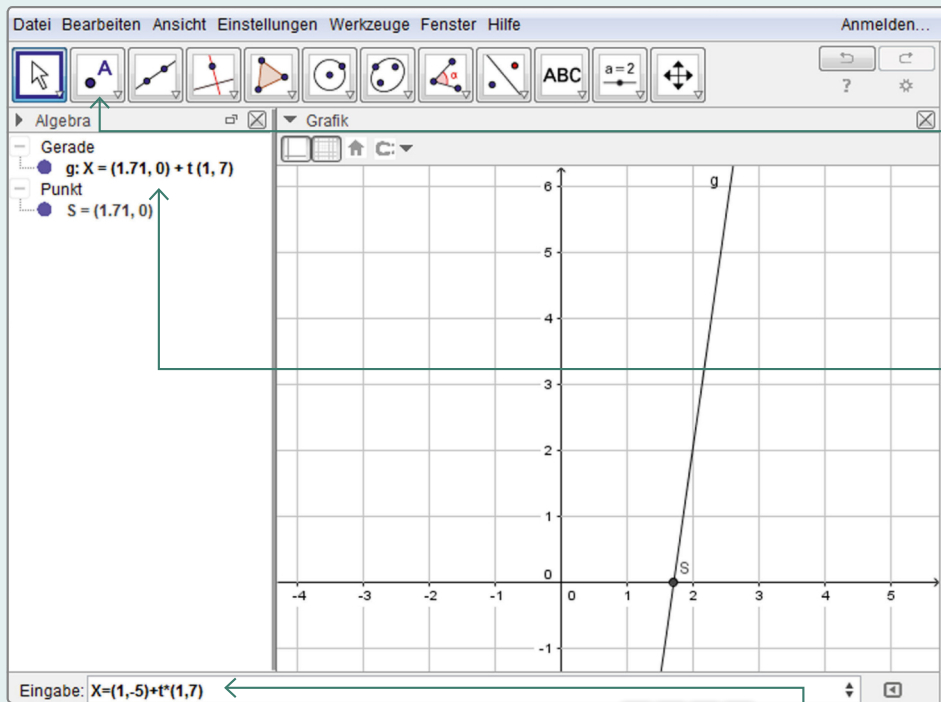
$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabenstellung:** Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x-Achse an!


S = \_\_\_\_\_

**Bearbeitung mit Technologie:**

#### 1. Möglichkeit: Lösung im Grafikfenster



1 2 3 4

**Werkzeugleiste:** Verwende das Werkzeug „Schneide“ , um den Schnittpunkt von g und der x-Achse zu berechnen!

1 2 3 4

**Algebra:** GeoGebra zeigt die Parameterdarstellung an. Als Punkt wird dabei (1,71, 0) verwendet. Das ist schon der gesuchte Schnittpunkt mit der x-Achse. Alternativ: siehe **3**!

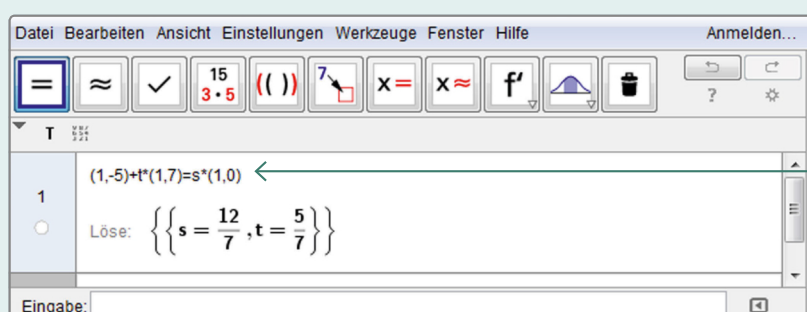
1 2 3 4

**Eingabe/Grafik:** Gib die Parameterdarstellung  $X = (1, -5) + t(1, 7)$  ein! GeoGebra zeichnet die entsprechende Gerade. Benenne sie in g um!


Ein kleiner Schönheitsfehler dieser Bearbeitung ist, dass die x-Koordinate des Schnittpunkts in Dezimalschreibweise angezeigt wird. Man kann allerdings durch Erhöhen der Anzahl der Nachkommastellen (wähle dazu in der Menüleiste unter „Einstellungen“ den Punkt „Runden“) die Genauigkeit des Ergebnisses zumindest verbessern. Das vom BIFIE in der Lösungserwartung angegebene Toleranzintervall für die x-Koordinate lautet:  $[1,70; 1,72]$ . Um mit dem Ergebnis in diesem Intervall zu landen, muss also zumindest auf 1 Nachkommastelle gerundet werden.

#### 2. Möglichkeit: Lösung im CAS

Überlege: Eine Parameterdarstellung der x-Achse ist  $X = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Setze nun im CAS die Parameterdarstellungen von g und der x-Achse gleich:



1 2 3 4

**CAS/Werkzeugleiste:** Gib  $(1,-5) + t(1,7) = s(1,0)$  ein und klicke auf das Werkzeug „Löse“ ! GeoGebra gibt für den Parameter s den Wert  $s = \frac{12}{7}$  aus. Setze diesen Wert in die Parameterdarstellung der x-Achse ein:  $S = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

<sup>3</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 4, Grundkompetenz AG 3.4, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

**T 9.04 Maturaufgabe: Parameterdarstellung einer Geraden<sup>4</sup>**

Die zwei Punkte  $A = (-1|-6|2)$  und  $B = (5|-3|-3)$  liegen auf einer Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabenstellung:** Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden  $g$  unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

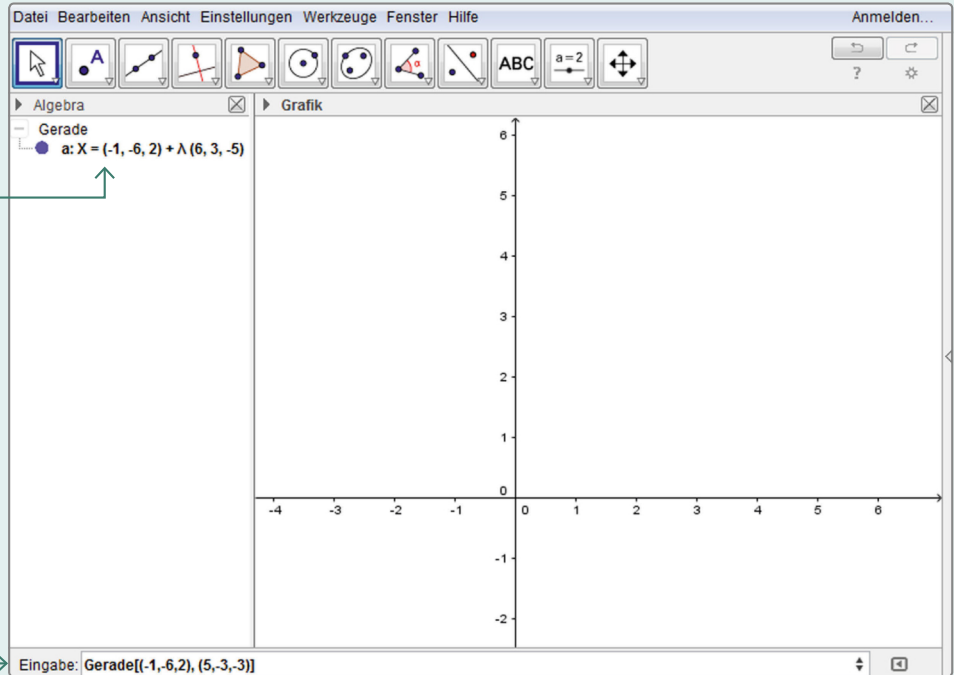
$g: X =$  \_\_\_\_\_

**Bearbeitung mit Technologie:**

**1. Möglichkeit: Lösung mit Hilfe der Eingabezeile**

1 2 3

**Algebra:** GeoGebra gibt die Parameterdarstellung der gesuchten Geraden aus. (Um diese Gerade auch sehen zu können, müsste man das 3D-Grafikfenster öffnen. Das ist hier allerdings nicht relevant.)



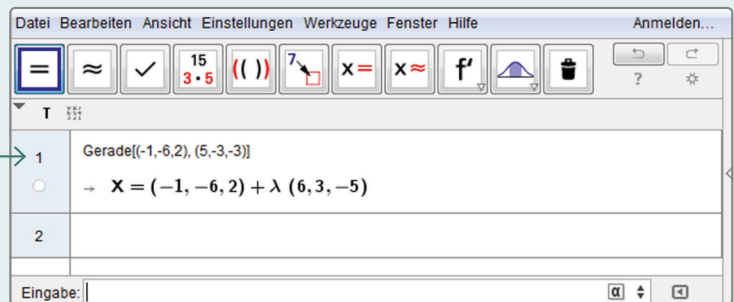
1 2 3

**Eingabe:** Gib `Gerade[(-1,-6,2),(5,-3,-3)]` ein!

**2. Möglichkeit: Lösung im CAS**

1 2 3

**CAS:** Gib `Gerade[(-1,-6,2),(5,-3,-3)]` ein! GeoGebra gibt sofort die Parameterdarstellung der gesuchten Geraden aus.



Wären in dieser Aufgabe zwei Punkte A und B im  $\mathbb{R}^2$  gegeben, so wäre die Vorgehensweise zunächst analog. GeoGebra würde dann aber eine Geradengleichung von  $g$  (und eben keine Parameterdarstellung) ausgeben. Im Kontextmenü der Geraden  $g$  kann man aber sofort zur Parameterdarstellung wechseln.

<sup>4</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 4, Grundkompetenz AG 3.4, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

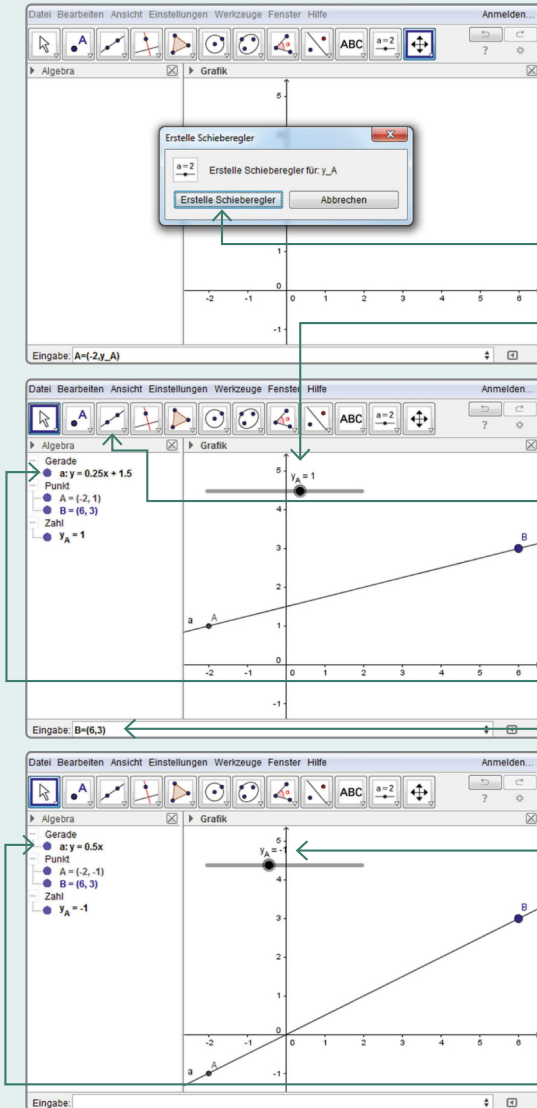
**T 9.05 Maturaufgabe: Lineare Funktion<sup>5</sup>**

Der Graph einer linearen Funktion  $f$  verläuft durch die beiden Punkte  $A = (-2 | y_A)$  und  $B = (6 | 3)$ .

**Aufgabenstellung:** Bestimmen Sie  $y_A$  so, dass der Graph der Funktion  $f$  die Steigung  $\frac{1}{2}$  hat!

**Bearbeitung mit Technologie:**

**1. Möglichkeit: Lösung im Grafikfenster**



1 2 3 4 5 6  
**Eingabe/Erstelle Schieberegler/Grafik:** Gib  $A = (-2, y_A)$  ein! Drücke im sich öffnenden Fenster auf „Erstelle Schieberegler“! GeoGebra zeichnet den Punkt A, dessen y-Koordinate man mit dem Schieberegler verändern kann.

1 2 3 4 5 6  
**Werkzeugleiste:** Wähle das Werkzeug „Gerade“ und zeichne eine Gerade durch die Punkte A und B!

1 2 3 4 5 6  
**Algebra:** GeoGebra zeigt die Gleichung der Geraden in der Form  $ax + by = c$  an. Wähle im Kontextmenü der Geraden die Darstellung  $y = kx + d$  aus, weil man an ihr die Steigung besser ablesen kann!

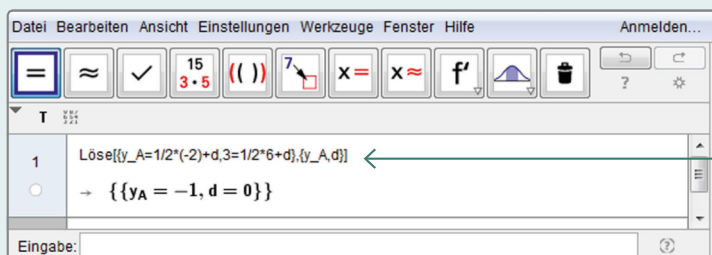
1 2 3 4 5 6  
**Eingabe:** Gib  $B = (6, 3)$  ein!

1 2 3 4 5 6  
**Grafik/Algebra:** Verändere den Wert des Schiebereglers so, dass die Gerade die Steigung 0,5 hat! Das passiert beim Wert  $y_A = -1$ .

Standardmäßig ist beim Schieberegler für  $y_A$  das Minimum mit  $-5$ , das Maximum mit  $5$  und die Schrittweite mit  $0,05$  eingestellt. Gegebenenfalls müsste man in ähnlichen Situationen diese Einstellungen im Eigenschaften-Dialog des Schiebereglers passend verändern.

**2. Möglichkeit: Lösung im CAS**

Die Gleichung einer linearen Funktion  $f$  mit Steigung  $k = \frac{1}{2}$  lautet allgemein:  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + d$ . Setze nun die beiden Punkte A und B in diese Gleichung ein und löse das entstehende Gleichungssystem!

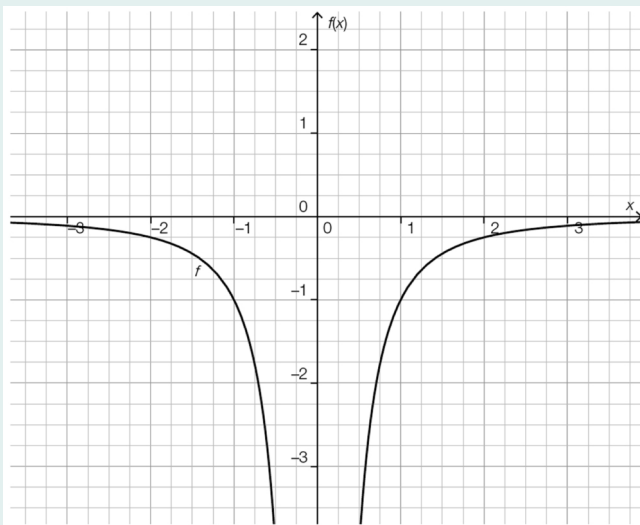


1 2 3 4 5 6  
**CAS:** Gib  $\text{Löse}[\{y_A = 1/2 \cdot (-2) + d, 3 = 1/2 \cdot 6 + d\}, \{y_A, d\}]$  ein! GeoGebra liefert für  $y_A$  den Wert  $-1$ .

<sup>5</sup> Grundkompetenz FA 2.2

T 9.06 **Maturaufgabe: Potenzfunktion<sup>6</sup>**

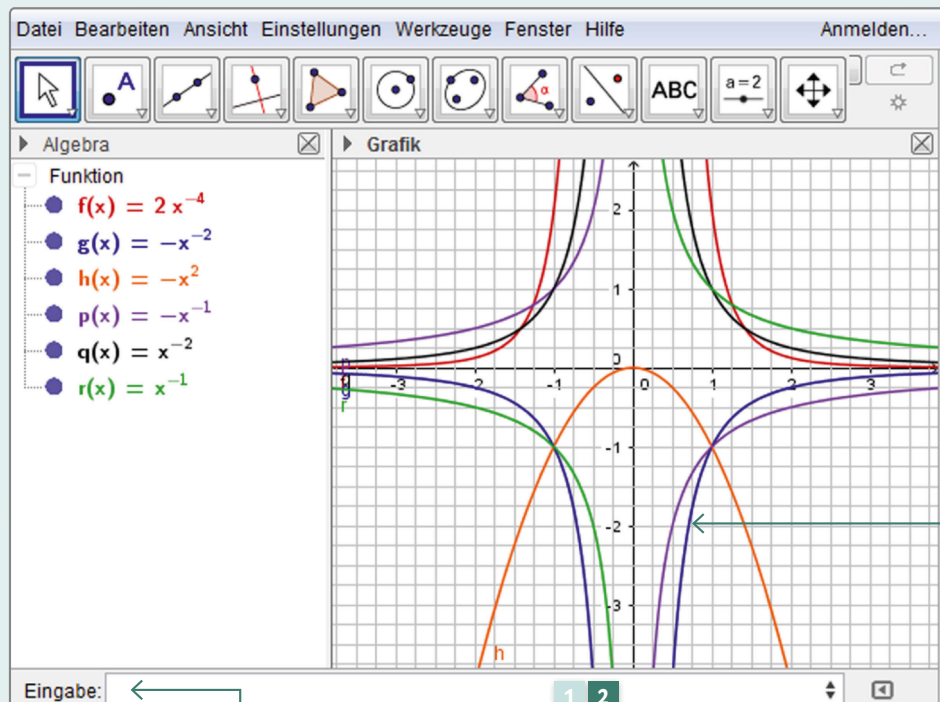
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Potenzfunktion  $f$  vom Typ  $f(x) = a \cdot x^z$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ;  $z \in \mathbb{Z}$  dargestellt.



**Aufgabenstellung:** Eine der nachstehenden Gleichungen ist eine Gleichung dieser Funktion  $f$ . Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

$f(x) = 2x^{-4}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = -x^{-2}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = -x^2$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = -x^{-1}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = x^{-2}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = x^{-1}$	<input type="checkbox"/>

**Bearbeitung mit Technologie:**



1 2

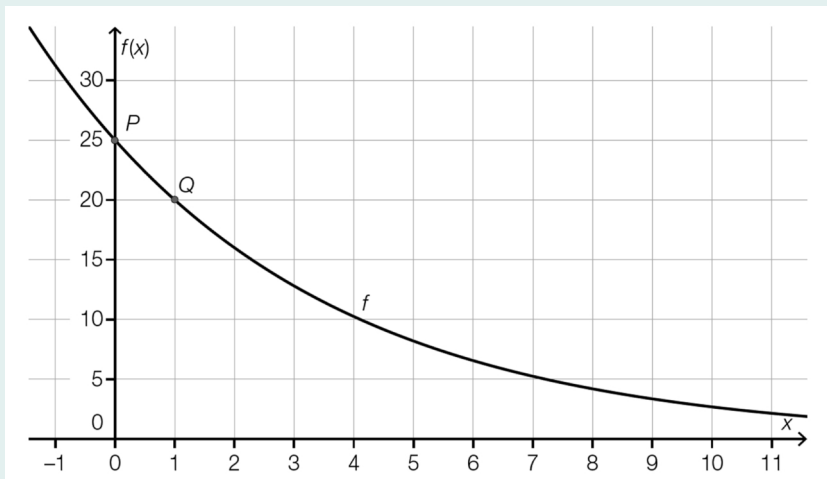
**Eingabe:** Gib nacheinander die Funktionsterme  $2x^{-4}$ ,  $-x^{-2}$ ,  $-x^2$ ,  $-x^{-1}$ ,  $x^{-2}$  und  $x^{-1}$  ein!

**Grafik/Algebra:** GeoGebra zeichnet die Graphen in unterschiedlichen Farben. Wähle den richtigen Graphen aus und lies im Algebrafenster den entsprechenden Funktionsterm ab, hier also der blaue Graph mit dem Funktionsterm  $-x^{-2}$ .

<sup>6</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 9, Grundkompetenz FA 3.1, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.07 **Maturaufgabe: Exponentialfunktion<sup>7</sup>**

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = a \cdot b^x$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$  durch die Punkte  $P = (0|25)$  und  $Q = (1|20)$ .

**Aufgabenstellung:**

Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion  $f$  an!

**Bearbeitung mit Technologie:**

Öffne das CAS!

1 2 3 4

CAS: Gib in die erste Zeile des CAS  $f(x) := a \cdot b^x$  ein! Achte bei der Eingabe auf  $:=$ , damit die Funktion  $f$  eingespeichert wird!

1 2 3 4

CAS: Laut Angabe geht der Graph von  $f$  durch den Punkt  $P = (0|25)$ . Das heißt, dass  $f(0) = 25$  ist. Gib das in die zweite Zeile ein!

The screenshot shows a CAS interface with the following steps:

- Input:  $f(x) := a \cdot b^x$
- Input:  $f(0) = 25$ , resulting in  $a = 25$
- Input:  $f(1) = 20$ , resulting in  $a \cdot b = 20$
- Using the solve tool on the equations  $\{a = 25, a \cdot b = 20\}$ , the solution is  $\left\{ \left\{ a = 25, b = \frac{4}{5} \right\} \right\}$ .

1 2 3 4

CAS: Verfahre für den Punkt  $Q$  analog!

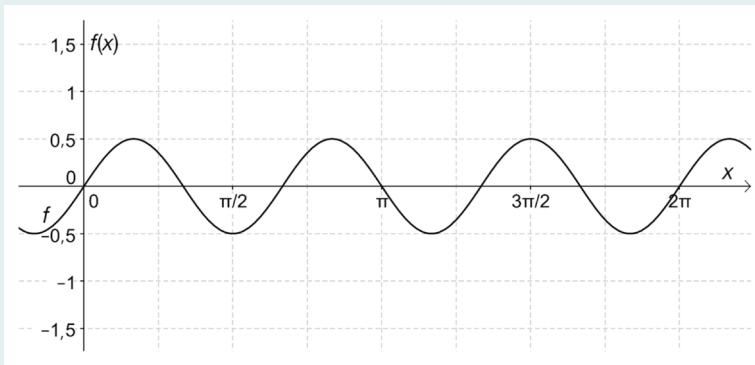
1 2 3 4

CAS: Markiere die Zeilen 2 und 3 und benutze das Werkzeug „Löse“  $x =$ ! GeoGebra gibt die gesuchten Parameterwerte an, eine mögliche Funktionsgleichung von  $f$  lautet:  $f(x) = 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x$ .

<sup>7</sup> Maturatermin 01/2016, Aufgabe 11, Grundkompetenz FA 5.4, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.08 **Maturaufgabe: Sinusfunktion<sup>8</sup>**

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion  $f$  mit  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .



**Aufgabenstellung:** Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von  $f$  an!

$a =$  \_\_\_\_\_

$b =$  \_\_\_\_\_

**Bearbeitung mit Technologie:**

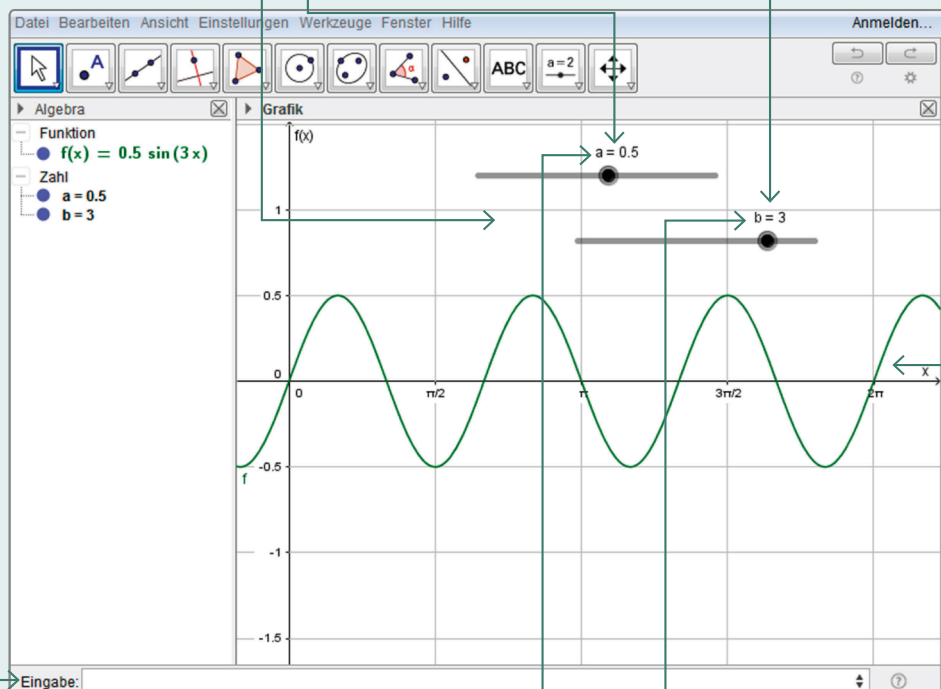
Die passenden Werte für  $a$  und  $b$  findet man am einfachsten mit Hilfe zweier Schieberegler.

1 2 3 4

**Werkzeugleiste/Grafik:** Erstelle zwei Schieberegler mit den Namen  $a$  und  $b$ . Die Voreinstellungen können beibehalten werden!

1 2 3 4

**Einstellungen:** Öffne den Eigenschaften-Dialog des Grafikfensters und wähle im Untermenü „x-Achse“  $\frac{\pi}{2}$  als Abstand! Für die y-Achse empfiehlt sich ein Abstand von 0,5. So erhält man dieselbe Skalierung der Achsen wie in der Angabe.



1 2 3 4

**Eingabe/Grafik:** Gib die  $f(x) = a \cdot \sin(bx)$  in die Eingabezeile ein. Blende das Koordinatengitter ein und verändere zuerst den Schieberegler  $a$ , um die Amplitude richtig einzustellen. Wenn  $a$  den Wert 0,5 annimmt, dann ist der maximale Funktionswert von  $f$  im GeoGebra-Arbeitsblatt genauso groß wie in der Angabe. Der gesuchte Parameter  $a$  hat also den Wert 0,5.

1 2 3 4

**Grafik:** Verändere im Anschluss den Schieberegler  $b$  um die richtige Kreisfrequenz zu erhalten! Wenn für  $b$  der Wert 3 eingestellt wird, dann sieht der Graph am GeoGebra-Arbeitsblatt genauso aus wie in der Angabe. Die passenden Werte für die gesuchten Parameter  $a$  und  $b$  sind 0,5 und 3.

<sup>8</sup> Maturatermin 05/2015, Aufgabe 12, Grundkompetenz FA 6.3, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.09 **Maturaufgabe: Ableitung einer Winkelfunktion<sup>9</sup>**

Eine Gleichung einer Funktion  $f$  lautet:

$$f(x) = 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$$

**Aufgabenstellung:**

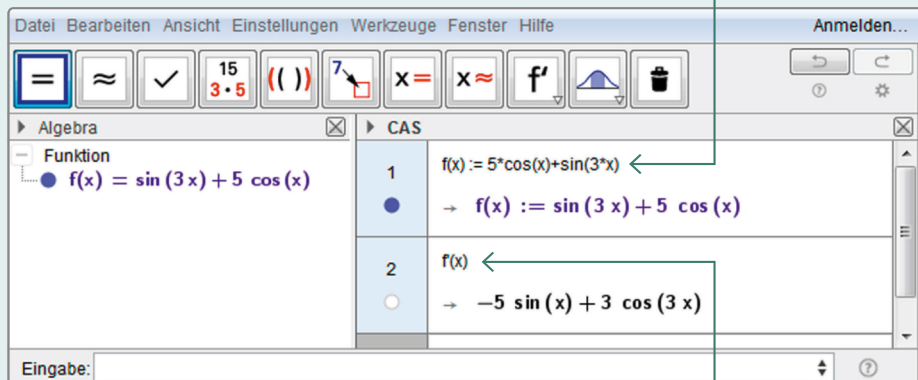
Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion  $f'$  der Funktion  $f$  an!

**Bearbeitung mit Technologie:**

Öffne das CAS!

1 2

**CAS:** Gib in die erste Zeile des CAS  $f(x) := 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$  ein! Achte bei der Eingabe auf  $:=$ , damit die Funktion  $f$  eingespeichert wird!



1 2

**CAS:** Tippe in die zweite Zeile des CAS  $f'(x)$  ein (oder verwende das Werkzeug  $f'$ ) und lies die Ausgabe ab! Die Lösung der Aufgabe lautet  $f'(x) = -5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(3 \cdot x)$ .

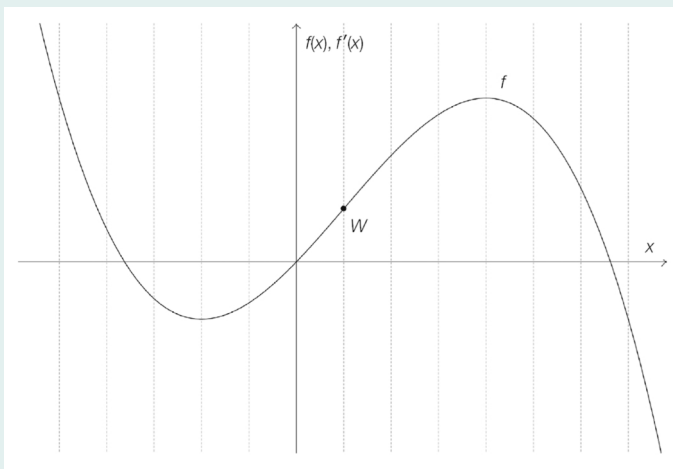
<sup>9</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 14, Grundkompetenz AN 2.1, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.10 **Maturaufgabe: Graph einer Ableitungsfunktion<sup>10</sup>**

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion  $f$  dritten Grades, die den Wendepunkt  $W$  besitzt.

**Aufgabenstellung:**

Skizzieren Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion  $f'$  in das Koordinatensystem!

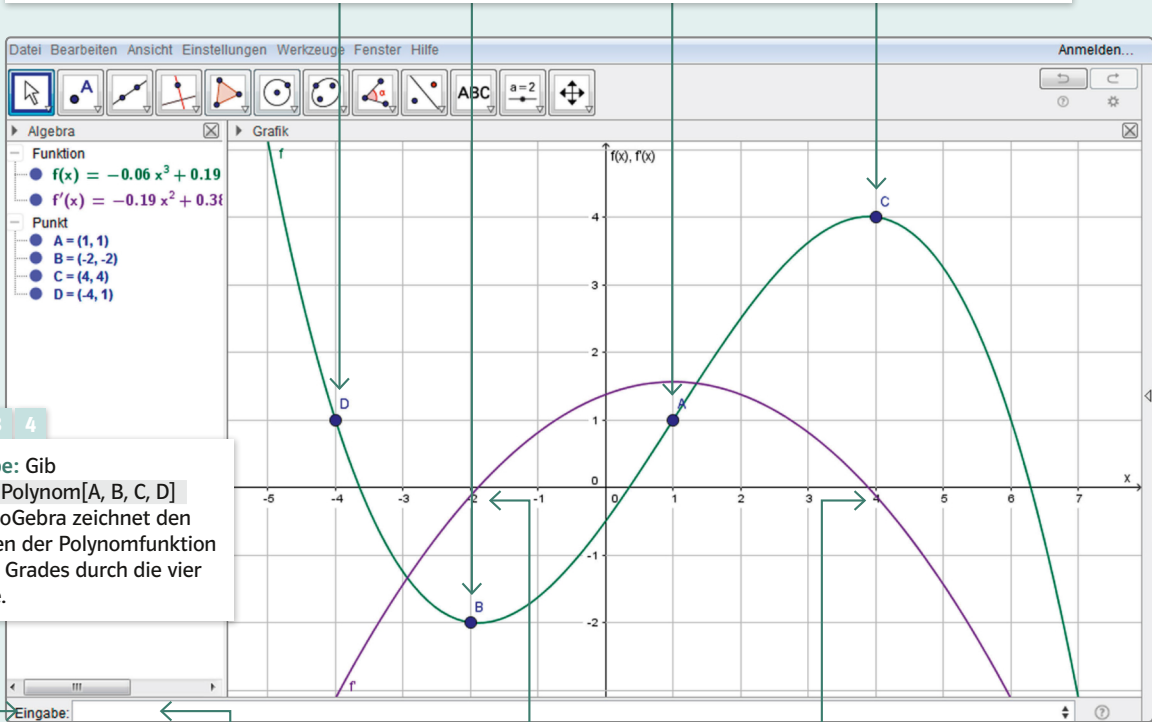


**Bearbeitung mit Technologie:**

Aus der Angabe lässt sich nicht eindeutig bestimmen, durch welche Punkte der Graph geht. Ungefähr kann man vier Punkte, die für eine Polynomfunktion dritten Grades maßgebend sind, erahnen. Die  $x$ -Koordinate der Punkte sind in der Angabe abzulesen, wobei die Skalierung fehlt, die Funktionswerte müssen geschätzt werden.

1 2 3 4

**Grafik:** Zeichne zuerst den Punkt A bei (1|1), dann den Punkt B bei (-2|-2), den Punkt C bei (4|4) und abschließend den Punkt D bei (-4|1) ein! Ein Polynom vierten Grades ist durch vier Punkte eindeutig definiert.



1 2 3 4

**Eingabe:** Gib  $f(x) = \text{Polynom}[A, B, C, D]$  ein. GeoGebra zeichnet den Graphen der Polynomfunktion dritten Grades durch die vier Punkte.

1 2 3 4

**Eingabe:** Gib  $f'(x)$  ein! GeoGebra zeichnet den Graphen der Ableitungsfunktion von  $f$ . Übertrage diesen nun in die Abbildung!

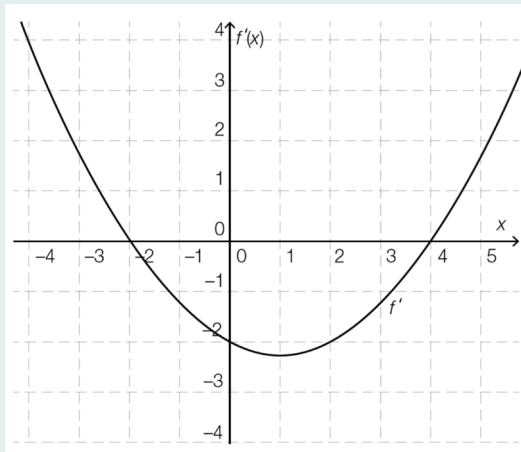
1 2 3 4

**Eingabe:** Das Problem bei diesem Ergebnis ist, dass das lokale Minimum nicht exakt an der Stelle -2 und das lokale Maximum nicht exakt an der Stelle 4 ist. Das rührt daher, dass die Funktion  $f$  in GeoGebra durch das willkürlich Setzen der Punkte leicht andere Extrempunkte hat als die Funktion in der Angabe! Aufgrund der ungenauen Eingabe erhält man nur eine Näherung an die exakte Lösung.

<sup>10</sup> Maturatermin 01/2015, Aufgabe 15, Grundkompetenz AN 3.2, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

**T 9.11 Maturaufgabe: Graph einer Ableitungsfunktion<sup>11</sup>**

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  mit  $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 2$  einer Polynomfunktion.

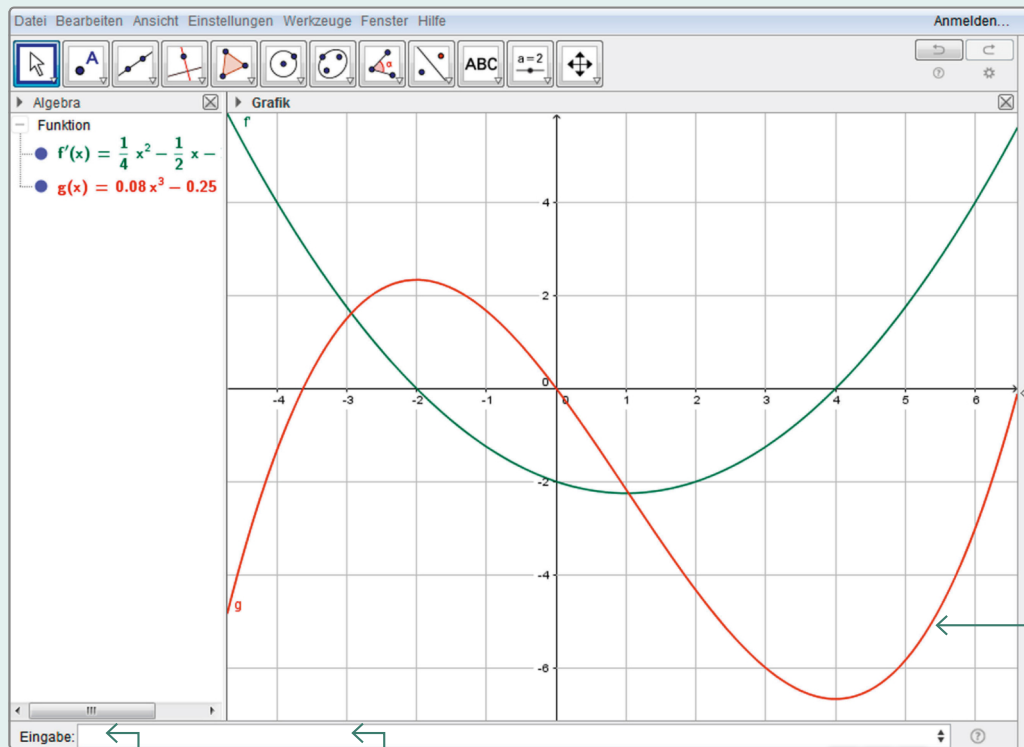


**Aufgabenstellung:**

Welche der folgende Aussagen über die Funktion  $f$  sind richtig? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion $f$ hat im Intervall $[-4; 5]$ zwei lokale Extremstellen.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[1; 2]$ monoton steigend.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[-4; 2]$ monoton fallend.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[-4; 0]$ linksgekrümmt (d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [-4; 0]$ ).	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.	<input type="checkbox"/>

**Bearbeitung mit Technologie:**



**1 2 3**  
**Eingabe:** Gib die folgende Funktionsgleichung in die Eingabezeile ein:  
 $f'(x) = 1/4 x^2 - 1/2 x - 2$  !

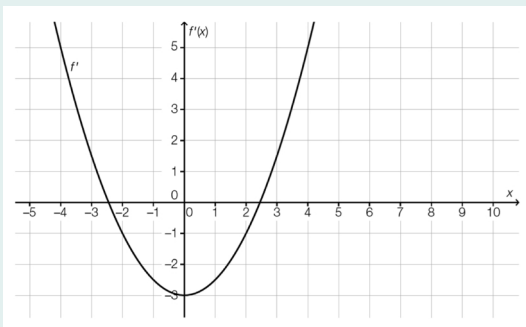
**1 2 3**  
**Eingabe:** Zeichne den Graphen einer Stammfunktion  $g$  von  $f'$ , tippe dazu  $g(x) = \text{Integral}(f')$  ein! Es handelt sich bei  $g$  nicht unbedingt um die Funktion  $f$  aus der Angabe. Sie besitzt aber qualitativ dieselben Eigenschaften wie  $f$ .

**1 2 3**  
**Grafik:** Betrachte den Graphen von  $g$ , um die Gültigkeit der Aussagen zu verifizieren! Die erste und die letzte Antwortmöglichkeit sind richtig.

<sup>11</sup> Maturatermin 05/2015, Aufgabe 17, Grundkompetenz AN 3.3, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

**T 9.12 Maturaufgabe: Graph einer Ableitungsfunktion<sup>12</sup>**

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  einer Funktion  $f$ . Die Funktion  $f'$  ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.



**Aufgabenstellung:**

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion $f$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[-4; 3]$ streng monoton fallend.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion $f$ ist im Intervall $[-4; 4]$ linksgekrümmt.	<input type="checkbox"/>

**Bearbeitung mit Technologie:**

1 2 3 4

Grafik: Der Graph von  $f'$  verläuft durch die Punkte  $(-4|5)$ ,  $(0|-3)$  und  $(4|5)$ . Zeichne diese Punkte in die Grafiksicht.

1 2 3 4

**Eingabe/Algebra:** Schreibe  $\text{Integral}(f')$  in die Eingabezeile! GeoGebra gibt eine Funktionsgleichung von  $g$  an und zeichnet ihren Graphen!

1 2 3 4

**Eingabe:** Gib  $\text{Polynom}[A, B, C]$  in die Eingabezeile ein! GeoGebra zeichnet den Graphen einer Polynomfunktion zweiten Grades durch die drei Punkte  $A, B$  und  $C$ . Das ist der Graph der gegebenen Funktion  $f'$  aus der Angabe.

Eingabe:

1 2 3 4

**Grafik:** Wie zuvor besitzt  $g$  dieselben relevanten Eigenschaften wie  $f$ . Die erste Aussage lässt sich über das Algebrafenster verifizieren. Betrachte anschließend den Graphen einer Stammfunktion von  $f$ . Die Aussagen 1 und 5 sind anzukreuzen.

<sup>12</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 16, Grundkompetenz AN 3.3, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.13 **Maturaufgabe: Median und Modus**<sup>13</sup>

Gegeben ist eine ungeordnete Liste von 19 natürlichen Zahlen:

5, 15, 14, 2, 5, 13, 11, 9, 7, 16, 15, 9, 10, 14, 3, 14, 5, 15, 14

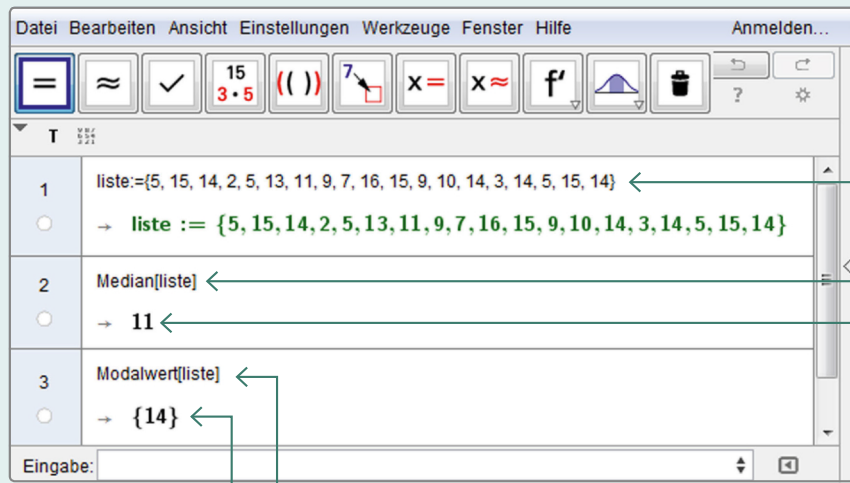
**Aufgabenstellung:** Geben Sie den Median und den Modus dieser Liste an!

Median: \_\_\_\_\_

Modus: \_\_\_\_\_

**Bearbeitung mit Technologie:**

Diese Aufgabe lässt sich am übersichtlichsten mit dem CAS lösen.



The screenshot shows the CAS interface with three rows of input and output:

- Row 1: Input: `liste:={5, 15, 14, 2, 5, 13, 11, 9, 7, 16, 15, 9, 10, 14, 3, 14, 5, 15, 14}`; Output: `liste := {5, 15, 14, 2, 5, 13, 11, 9, 7, 16, 15, 9, 10, 14, 3, 14, 5, 15, 14}`
- Row 2: Input: `Median[liste]`; Output: `11`
- Row 3: Input: `Modalwert[liste]`; Output: `{14}`

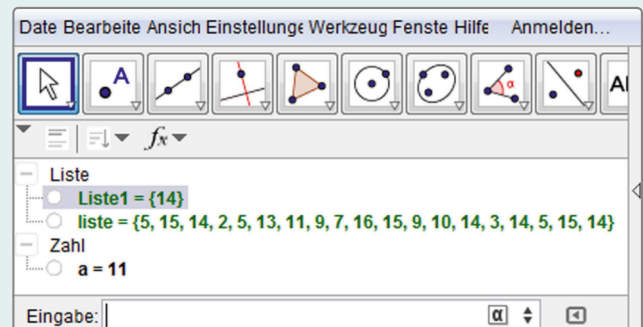
Annotations on the right side of the screenshot:

- Annotation 1: CAS: Gib die Daten zwischen geschwungenen Klammern in der Form `liste := {5, 15, ..., 14}` ein!
- Annotation 2: CAS: Gib `Median[liste]` ein! GeoGebra gibt den Median der Datenliste aus.
- Annotation 3: CAS: Gib `Modalwert[liste]` ein! GeoGebra gibt den Modus der Datenliste aus. (Da es mehrere Modi geben kann, zählt GeoGebra sie in einer Liste zwischen geschwungenen Klammern auf. Hier gibt es nur einen einzigen Modus.)

Der Median beträgt daher 11, der Modus beträgt 14.

Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem die gleichen Eingaben hintereinander in der Eingabezeile gemacht werden. GeoGebra zeigt dann den Median im Algebrafenster unter „Zahl“ an, den Modus unter „Liste“. Um zu vermeiden, dass GeoGebra die Ergebnisse selbst benennt, gib die Datenliste ein und danach (beispielsweise)

`median = Median[liste]` und  
`modus = Modalwert[liste]` !



The screenshot shows the Algebra View with the following objects:

- Liste: `Liste1 = {14}`
- liste: `liste = {5, 15, 14, 2, 5, 13, 11, 9, 7, 16, 15, 9, 10, 14, 3, 14, 5, 15, 14}`
- Zahl: `a = 11`

Eine weitere Methode benutzt die Tabellenkalkulation von GeoGebra. Da dafür die Datenwerte zuerst in eine Spalte geschrieben werden müssen, ist dies für die vorliegende, sehr einfache Aufgabe die umständlichste Variante.

<sup>13</sup> Maturatermin 01/2016, Aufgabe 20, Grundkompetenz WS 1.4, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.14 **Maturaufgabe: Sammelwahrscheinlichkeit bei Überraschungseiern<sup>14</sup>**

Ein italienischer Süßwarenhersteller stellt Überraschungseier her. Das Ei besteht aus Schokolade. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug oder eine Sammelfigur. Der Hersteller wirbt für die Star-Wars-Sammelfiguren mit dem Slogan „Wir sind jetzt mit dabei, in jedem 7. Ei!“.

**Aufgabenstellung:** Peter kauft in einem Geschäft zehn Überraschungseier aus dieser Serie. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens eine Star-Wars-Sammelfigur erhält!

**Bearbeitung mit Technologie:** Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit  $n = 10$  und  $p = \frac{1}{7}$ . Unter „Ansicht“ öffne den Wahrscheinlichkeitsrechner!

**1 2 3 4**  
Wahrscheinlichkeitsrechner: Wähle als Verteilungstyp „Binomial“!

**1 2 3 4**  
Wahrscheinlichkeitsrechner: Gib in die entsprechenden Felder 10 für n und 1/7 für p ein! (Die zweite Eingabe wird nach Bestätigung mit Enter von GeoGebra zu 0,1429 gerundet.)

**1 2 3 4**  
Wahrscheinlichkeitsrechner: Gib in die Textfelder der untersten Zeile 1 und 10 ein, sodass die Bedingung  $P(1 \leq X \leq 10)$  lautet!

**1 2 3 4**  
Wahrscheinlichkeitsrechner: GeoGebra zeigt die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.

k	P(X = k)
0	0.214
1	0.3567
2	0.2676
3	0.119
4	0.0347
5	0.0069

$\mu = 1.429$   $\sigma = 1.1067$

Binomial

n 10 p 0.1429

$P(1 \leq X \leq 10) = 0.786$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher 0,786 oder 78,6%.

<sup>14</sup> Maturatermin 09/2015, Aufgabe 24, Grundkompetenz WS 3.2, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

**T 9.15 Maturaufgabe: Testergebnisse<sup>15</sup>**

Bei einem Test werden 20 Prüfungsaufgaben gestellt, die jeweils mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet werden. Die folgende Liste gibt einen Überblick über die von den einzelnen Schülerinnen und Schülern beim Test erreichten Gesamtpunktezahlen:

7, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 16, 16, 16, 16, 17, 18, 20, 20

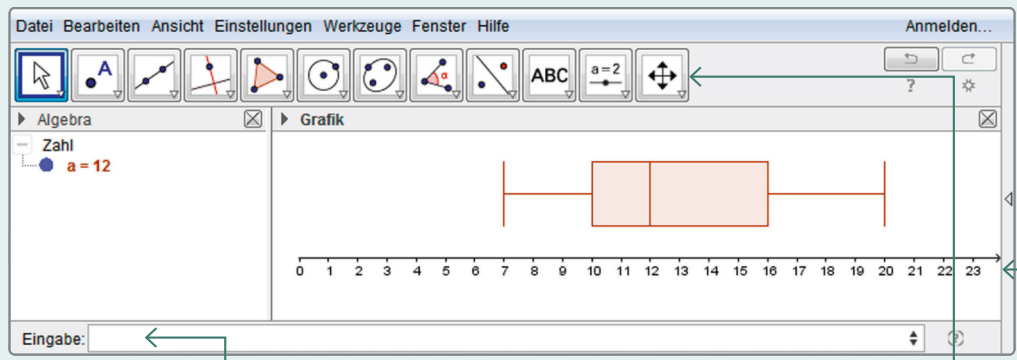
**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie denjenigen Boxplot (Kastenschaubild) an, der die Verteilung der erreichten Punktwerte korrekt darstellt!

	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>

**Bearbeitung mit Technologie:**

Mit Hilfe des Befehls „Boxplot“ lässt sich diese Aufgabe in GeoGebra einfach lösen.

**1 2 3**  
**Grafik/Kontextmenü:** Blende die y-Achse aus und markiere bei der x-Achse den Punkt „Nur positive Achse“!



**1 2 3**  
**Eingabe/Grafik:** Gib den Befehl `Boxplot[1, 0,5, {7, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 16, 16, 16, 16, 17, 18, 20, 20}]` ein und bestätige mit Enter! In den geschwungenen Klammern steht dabei die gegebene Urliste; die ersten beiden Zahlen (1 und 0,5) sind Parameter und dienen nur der Skalierung.

**1 2 3**  
**Grafik/Werkzeugleiste:** Wähle das Werkzeug „Verschiebe Grafik-Ansicht“ und skaliere damit die x-Achse so, dass der Bereich von 0 bis 20 gut sichtbar ist!

Man erkennt, dass dieser Boxplot dem ersten der in der Aufgabenstellung angegebenen Boxplots entspricht. Kreuze also diesen an!

<sup>15</sup> Probeklausur 03/2014, Aufgabe 17, Grundkompetenz WS 1.1, kostenloser Download: [www.bifie.at/node/80](http://www.bifie.at/node/80)

T 9.16 **Maturaufgabe: Konfidenzintervall<sup>16</sup>**

Von einer Stichprobe sind jeweils der Stichprobenumfang  $n$  und die relative Häufigkeit  $h$  eines beobachteten Merkmals gegeben.

**Aufgabenstellung:** Ordnen Sie jeder Stichprobe das richtige Konfidenzintervall für das vorgegebene Konfidenzniveau  $\gamma$  (Sicherheitsniveau) zu!

$n = 1000$ $h = 0,3$ $\gamma = 0,6$	
$n = 1000$ $h = 0,3$ $\gamma = 0,95$	
$n = 500$ $h = 0,3$ $\gamma = 0,99$	
$n = 1000$ $h = 0,4$ $\gamma = 0,50$	

**Bearbeitung mit Technologie:**

Ist der Stichprobenumfang  $n$ , die relative Häufigkeit  $h$  und das Konfidenzniveau  $\gamma$  gegeben, so lässt sich das Konfidenzintervall mit Hilfe des Befehls „GaußAnteilSchätzer[ $h,n,\gamma$ ]“ bestimmen. Man kann damit also für jede gegebene Stichprobe das Konfidenzintervall ermitteln. Dieses vergleicht man dann mit den aus den Abbildungen abgelesenen Konfidenzintervallen. Liest man auch die relative Häufigkeit aus den Abbildungen ab, lassen sich die möglichen Zuordnungen noch weiter einschränken.

1 2

**Algebra:** Lies aus der Liste das Konfidenzintervall ab! Es ergibt sich  $p_1 = 0,29$  und  $p_2 = 0,31$ .

1 2

**Eingabe/Algebra:** Gib zunächst für die erste Stichprobe den Befehl `GaußAnteilSchätzer[0,3, 1000, 0,6]` ein und bestätige mit Enter! Im Algebra-Fenster wird damit eine neue Liste erzeugt, welche die Grenzen des Konfidenzintervalls enthält.

Algebrafenster: Liste1 = {0,29, 0,31}

Dies entspricht dem Konfidenzintervall aus der Abbildung A. Verfahre ebenso mit den anderen Stichproben!

<sup>16</sup> Aufgabenpool bifie 03/2013, Aufgabe 1\_190, Grundkompetenz WS 4.1, kostenloser Download: [aufgabenpool.bifie.at/srp\\_ahs/index.php](http://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/index.php)