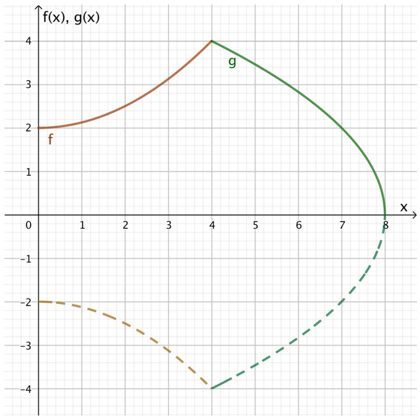
Thema: Weitere Aufgaben – Volumenberechnungen		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:** mittel/schwierig	**Klasse:**

1. Die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2\ \ (0 \leq x \leq 4)$ und g mit $g(x) = 2\sqrt{8-x}\ \ (4 \leq x \leq 8)$ bilden bei Rotation in den gegebenen Intervallen um die x-Achse den Innenraum einer Vase. (Maße in cm)
a) Bestimme den Rauminhalt der Vase.



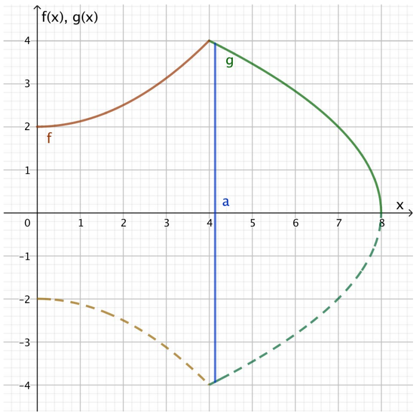
b) Berechne die Höhe des Wasserspiegels, wenn 30π cm³ Wasser in die Vase gegossen werden.

2. Ein Werkstück aus Messing mit der Dichte ρ = 8,5 g/cm³ entsteht, wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{12}\sqrt{36-x^2}$ um die positive x-Achse rotiert. Mache eine Skizze und bestimme die Masse des Werkstücks.

3. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{0{,}02x^2 - 3{,}76x + 400}$ beschreibt bei der Rotation um die x-Achse im Bereich $0\ m \leq x \leq 100\ m$ die Außenhülle eines Kühlturms. Berechne, wieviel Kubimeter Beton für den Kühlturm benötigt werden, wenn die Außenhülle eine Wandstärke von 1 m haben soll.

Lösungswege 8 – Online Arbeitsblatt

Thema: Lösungen - Weitere Aufgaben – Volumenberechnungen		**Grundkompetenz:**
Name:	**Schwierigkeitsgrad:** mittel/schwierig	**Klasse:**



1. Die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2 \;\; (0 \leq x \leq 4)$ und g mit $g(x) = 2\sqrt{8 - x} \;\; (4 \leq x \leq 8)$ bilden bei der Rotation in den gegebenen Intervallen um die x-Achse den Innenraum einer Vase. (Maße in cm)
a) Bestimme den Rauminhalt der Vase.

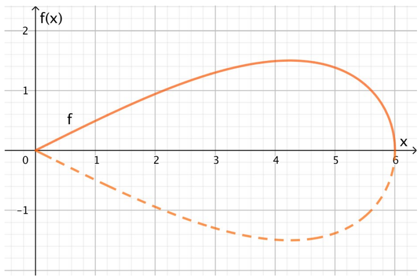
$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{x^2}{8} + 2\right)^2 dx + \pi \cdot \int_4^8 4 \cdot (8 - x) dx =$
$= \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{x^4}{64} + \frac{x^2}{2} + 4\right) dx + \pi \cdot \int_4^8 (32 - 4x) dx =$
$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{320} + \frac{x^3}{6} + 4x\right) \Big|_0^4 + \pi \cdot (32x - 2x^2) \Big|_4^8 =$
$= \frac{448}{15}\pi + 32\pi = \frac{928}{15}\pi \approx 194{,}36$ cm³

b) Berechne die Höhe des Wasserspiegels, wenn 30π cm³ Wasser in die Vase gegossen werden.

Da $30\pi < 32\pi$ ist, betrachtet man zur Berechnung der Höhe h des Wasserspiegels den Graphen der Funktion g:
$\pi \cdot \int_a^8 (32 - 4x) dx = 30\pi$
$\pi \cdot (32x - 2x^2) \Big|_a^8 = 30\pi$
$(256 - 2 \cdot 64) - (32a - 2a^2) = 30 \quad \rightarrow \quad 2a^2 - 32a + 98 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 \approx 4{,}13 \quad (a_2 \approx 11{,}87)$

Für die Höhe h des Wasserspiegels gilt: h ≈ 8 – 4,13 ≈ 3,86 cm

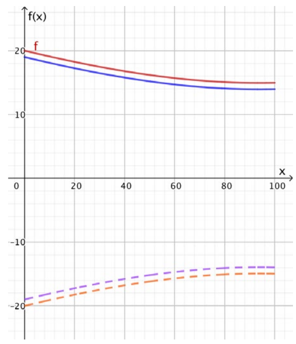
2. Ein Werkstück aus Messing mit der Dichte ρ = 8,5 g/cm³ entsteht, wenn der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{12} \cdot \sqrt{36 - x^2}$ um die positive x-Achse rotiert. Mache eine Skizze und bestimme die Masse des Werkstücks.



$V = \pi \cdot \int_0^6 \frac{x^2}{144} \cdot (36 - x^2) dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{144}\right) dx =$
$= \pi \cdot \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{720}\right) \Big|_0^6 \approx 22{,}62$ cm³

Für die Masse gilt: $m = \rho \cdot V \approx 8{,}5 \cdot 22{,}62 \approx 192{,}27$ g

3. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{0{,}02x^2 - 3{,}76x + 400}$ beschreibt bei der Rotation um die x-Achse im Bereich $0\,m \leq x \leq 100\,m$ die Außenhülle eines Kühlturms. Berechne, wieviel Kubimeter Beton für den Kühlturm benötigt werden, wenn die Außenhülle eine Wandstärke von 1 m haben soll.



Da die Wandstärke 1 m betragen soll, gilt für die innere Begrenzung f(x) – 1.

$V = \pi \cdot \int_0^{100} \left((f(x))^2 - (f(x) - 1)^2\right) dx = \pi \cdot \int_0^{100} \Big((f(x))^2 - (f(x))^2 +$
$+ 2 \cdot f(x) - 1\Big) dx =$
$= \pi \cdot \int_0^{100} (2 \cdot \sqrt{0{,}02x^2 - 3{,}76x + 400} - 1) dx \approx 10129{,}4$ m³ (mit Technologie)