4 DIE NORMALVERTEILUNG

W 4.01 Was versteht man unter einer diskreten Zufallsvariablen? Gib ein Beispiel an!

W 4.02 Was versteht man unter der Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X?

W 4.03 Wie können Wahrscheinlichkeiten von diskreten Zufallsvariablen grafisch dargestellt werden?

W 4.04 Was versteht man unter einer stetigen Zufallsvariablen? Gib ein Beispiel an!

W 4.05 Was versteht man unter der Dichtefunktion bzw. der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen?

W 4.06 Wie können Wahrscheinlichkeiten von stetigen Zufallsvariablen grafisch dargestellt werden?

W 4.07 Was versteht man unter der Gauß'sche Glockenkurve? Wovon hängt deren Form ab?

W 4.08 Was versteht man unter einer normalverteilten Zufallsvariablen X?

W 4.09 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ und seien $c, d \in \mathbb{R}$. Wie berechnet man $P(X \leq c)$, $P(X \geq c)$ und $P(c \leq X \leq d)$?

W 4.10 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ und seien $c, d \in \mathbb{R}$. Wie berechnet man $P(X \in I)$ und $P(X \notin I)$, wenn $I = [\mu - d; \mu + d]$ ist?

W 4.11 Für eine annähernd normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ werden Werte durch häufige Versuchsdurchführung ermittelt. Wie viel Prozent der Werte liegen voraussichtlich in den angegebenen Intervallen $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, $[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma]$ und $[\mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma]$?

W 4.12 Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Beschreibe, wie man $c \in \mathbb{R}$ ermitteln kann, sodass $P(X \leq c) = 0{,}6$, $P(X \geq c) = 0{,}6$ bzw. $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 0{,}6$ gilt!

W 4.13 Unter welchen Voraussetzungen darf man eine Binomialverteilung näherungsweise durch eine Normalverteilung ersetzen? Formuliere den zugrundeliegenden Satz und gib eine Faustregel an!

W 4.01 Diskrete Zufallsvariablen X können endlich viele oder abzählbar viele Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ annehmen. Dies bedeutet, dass man die Werte von X mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummerieren kann, zB: Augensummen beim Würfeln.

W 4.02 Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit den Werten $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P: a_i \mapsto P(a_i)$ ordnet jedem Wert a_i der Zufallsvariablen X dessen Wahrscheinlichkeit $P(a_i)$ zu.
Die Verteilungsfunktion $F: a_i \mapsto P(X \leqslant a_i)$ ordnet jedem Wert a_i der Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit zu, dass X höchstens den Wert a_i annimmt.

W 4.03 Wahrscheinlichkeitsfunktionen bzw. Verteilungsfunktionen können zB als Stabdiagramm grafisch dargestellt werden.

W 4.04 Stetige Zufallsvariablen X können unendlich viele, nicht abzählbare Werte annehmen, zum Beispiel alle Werte in einem Intervall (welches auch ganz $\mathbb{R}$ sein kann), zB: Füllmengen.

W 4.05 Sei X eine stetige Zufallsvariable und f eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:
- $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Dann ist f die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder kurz Dichtefunktion der Zufallsvariablen X. Die Funktion f gestattet es, für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant x)$ als Inhalt der von f in $(-\infty; x]$ festgelegten Fläche zu ermitteln.
Die Funktion $F: x \mapsto P(X \leqslant x)$ heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

W 4.06 Eine Wahrscheinlichkeit der Form $P(X \leqslant x)$ für eine stetige Zufallsvariable X kann als Inhalt einer Fläche unter dem Graphen einer passenden Funktion f dargestellt werden.

W 4.07 Als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
Die Form des Graphen hängt von den Parametern μ und σ ab.

W 4.08 Eine Zufallsvariable X, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine Gauß'sche Glockenkurve mit den Parametern μ und σ beschrieben werden kann, heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bezeichnet man als Normalverteilung mit den Parametern μ und σ.

W 4.09
- $P(X \leqslant c) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X \geqslant c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$

W 4.10 $P(\mu - d \leqslant X \leqslant \mu + d) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu+d-\mu}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - 1$

W 4.11 Im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen ca. 68,3 %, im Intervall $[\mu - 2\cdot\sigma; \mu + 2\cdot\sigma]$ ca. 95,4 % und in $[\mu - 3\cdot\sigma; \mu + 3\cdot\sigma]$ ca. 99,7 % der Werte.

W 4.12 Für $P(X \leqslant c) = 0{,}6$: Man setzt $c = \mu + z\cdot\sigma$ und verwendet die Formel $P(X \leqslant \mu + z\cdot\sigma) = \Phi(z)$.
Aus $\Phi(z) = 0{,}6$ folgt $z \approx 0{,}25$. Damit erhält man: $c \approx \mu + 0{,}25\cdot\sigma$.
Für $P(X \geqslant c) = 0{,}6$: Man setzt $c = \mu + z\cdot\sigma$ und verwendet die Formel $P(X \geqslant \mu + z\cdot\sigma) = \Phi(-z)$.
Aus $\Phi(-z) = 0{,}6$ folgt $z \approx -0{,}25$. Damit erhält man: $c \approx \mu - 0{,}25\cdot\sigma$.
Für $P(\mu - c \leqslant X \leqslant \mu + c) = 0{,}6$: Man setzt $c = z\cdot\sigma$ und verwendet die Formel $P(\mu - z\cdot\sigma \leqslant X \leqslant \mu + z\cdot\sigma) = 2\cdot\Phi(z) - 1$.
Aus $2\cdot\Phi(z) - 1 = 0{,}6$ folgt $z \approx 0{,}84$. Damit erhält man: $c \approx 0{,}84\cdot\sigma$.

W 4.13 Ist n genügend groß, dann kann eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p näherungsweise durch eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = n\cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ ersetzt werden.
Faustregel: Eine Binomialverteilung darf näherungsweise durch eine Normalverteilung ersetzt werden, wenn gilt: $n\cdot p\cdot(1-p) > 9$.