

In diesem Lehrwerk sind wir von den natürlichen Zahlen ausgegangen und haben die Zahlbereiche schrittweise erweitert: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dies entspricht im Großen und Ganzen der Geschichte der Mathematik. Im Folgenden wollen wir uns die Entstehung der einzelnen Zahlbereiche etwas genauer ansehen.

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind uralte Erfindungen der Menschen und wurden auf sehr verschiedene Weisen dargestellt, zB durch Haufen von Steinen oder Muscheln, durch Kerben auf einem Knochen, durch Knoten in einer Schnur und Ähnliches. Abb. 12.1 zeigt ein Quipu der Inkas. Die Knoten der Schnüre stellen Zahlen dar.



Abb. 12.1
Quipu der Inkas

Zählen war vielfach nicht notwendig. Wenn etwa ein Hirte seine Schafe auf die Weide entließ, warf er für jedes Schaf einen Stein auf einen Haufen. Wenn die Schafe wieder heimkehrten, nahm er für jedes Schaf wieder einen Stein weg. blieb ihm kein Stein übrig, wusste er, dass kein Schaf verloren gegangen war.

Primitive Völker konnten meist nicht sehr weit zählen; sie zählten im Prinzip: eins, zwei, viele. Anstelle von Steinen, Muscheln, Kerben, Knoten etc. wurden auch schon früh Zahlworte verwendet. Diese waren allerdings oft noch sehr an die gezählten Dinge gebunden. Es gab zB einen Stamm in British Columbia, der verschiedene

Zahlworte verwendete, je nachdem, ob lebende, runde, lange Objekte oder Tage gezählt wurden.

Bei den **Griechen** waren die natürlichen Zahlen zwar nicht mehr an konkrete Objekte gebunden, doch waren ihre Überlegungen zunächst stark von den Rechensteinen beeinflusst, die sie zum Rechnen verwendeten. Die Pythagoräer legten diese Steine zu Figuren auf. Zum Beispiel betrachteten sie die „Dreieckszahlen“ 1, 3, 6, 10, ..., die sich in Dreiecksform wie in Abb. 12.2 darstellen lassen, und die „Quadratzahlen“, die sich in Quadratform wie in Abb. 12.3 darstellen lassen. Dabei entdeckten sie interessante Zusammenhänge. Zum Beispiel kann man aus Abb. 12.3 erkennen, dass jede Quadratzahl die Summe von aufeinander folgenden ungeraden Zahlen ist, zB $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Man erkennt dies, wenn man zu den jeweils vorhandenen schwarzen Steinen die roten Steine dazulegt.

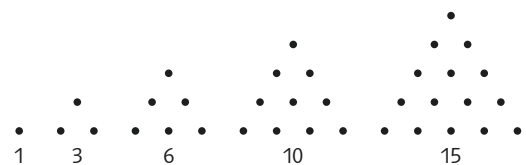


Abb. 12.2: Dreieckszahlen

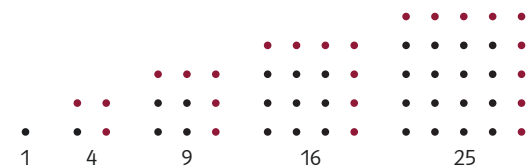


Abb. 12.3: Quadratzahlen

Während die vorgriechischen Völker Zahlen bloß benützten, haben die Griechen zum ersten Mal gefragt: Was ist eigentlich eine Zahl?

Aristoteles (384–322 v.Chr.) gab im Wesentlichen die Antwort: „Eine Zahl ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit“. Da die Einheit selbst keine Vielheit ist, wurde die Einheit (also 1) nicht als Zahl angesehen. So führte beispielsweise **Euklid** (um 300 v.Chr.) einige seiner Beweise doppelt, einmal für Zahlen (größer als 1) und einmal für die Einheit (1).

Die **Ziffern** 0, 1, 2, 3, ..., 9 unseres heutigen Zehnersystems gehen auf die Inder zurück. Sie kamen allerdings über die Araber nach Europa und heißen deshalb heute „arabische Ziffern“.

Die heute üblichen Rechenzeichen entstanden erst viel später. Die Zeichen „+“ und „-“ tauchten (nach älteren Vorläufern) im 15. Jahrhundert n. Chr. auf, etwas später auch die Zeichen „·“ und „:“. So lange keine Rechenzeichen zur Verfügung standen, wurden Rechengesetze nur verbal in sehr unübersichtlicher Form formuliert. Beispielsweise beschrieb der byzantinische Mathematiker **Leo** (9. Jahrhundert n. Chr.) das Assoziativgesetz $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \gamma) \cdot \beta$ so:

„Gegeben seien die Zahlen α, β, γ ; das Produkt aus α, β sei δ , das Produkt aus β, γ sei ϵ , das Produkt aus α, γ sei ζ , das Produkt aus α, ϵ sei η , das aus β, ζ sei θ , das aus γ, δ sei κ . Ich behaupte, dass die Zahlen η, θ, κ einander gleich sind“.

Rationale Zahlen

Die Ursprünge der Bruchrechnung sind bei den **Ägyptern** und **Babyloniern** zu suchen. Während die Babylonier durch die Verwendung eines Stellenwertsystems keine Probleme hatten, Brüche darzustellen, hatten die Ägypter mit ihrem Nicht-Stellenwertsystem größere Schwierigkeiten. Sie stellten (mit wenigen Ausnahmen) nur Stammbrüche dar, dh. Brüche der Form $\frac{1}{n}$, und zwar so, dass über das jeweilige Symbol für die natürliche Zahl n das Symbol für „Mund“ gesetzt wurde. Zum Beispiel:

$$\frac{1}{3} = \text{Symbol} \quad \frac{1}{6} = \text{Symbol} \quad \frac{1}{11} = \text{Symbol}$$

Brüche, die keine Stammbrüche sind, wurden in Summen von Stammbrüchen zerlegt, zum Beispiel:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \quad \frac{40}{7} = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

Solche Zerlegungen waren oft sehr schwer zu finden und wurden in Tabellen festgehalten.

Ein Rechnen mit diesen Darstellungen von Brüchen war natürlich eine äußerst komplizierte Sache und hinderte die Ägypter daran, eine Bruchrechnung im heutigen Sinn zu entwickeln.

Die **griechischen Philosophen** wollten Bruchzahlen nicht als Zahlen anerkennen, weil sie die Einheit für unteilbar hielten. So schrieb etwa **Platon** (427–347 v. Chr.):

„Du weißt doch, dass die echten Meister in dieser Kunst einen auslachen und es nicht zulassen würden, wenn jemand es unternehmen würde, die Einheit in Gedanken zu zerschneiden, und wenn du sie zerteilen wolltest, so würden sie sie vervielfältigen und es nie geschehen lassen, dass die Einheit nicht als Einheit, sondern als viele Teile erschiene.“

Als Ersatz für die fehlende Bruchrechnung entwickelten die Griechen eine Lehre von den Proportionen (Verhältnissen), mit der sie zunächst weitgehend auskamen.

Bei den **Arabern**, die die griechische Mathematik bewahrt und weiterentwickelt haben, wird die Frage, ob Verhältnisse Zahlen sind oder nicht, bereits diskutiert, sie schafften es aber auch nicht, die griechische Zahlauffassung ganz zu überwinden und Bruchzahlen als vollwertige Zahlen aufzufassen. Dieses Verdienst kommt erst **Petrus Ramus** (1515–1572) zu, der eine Zahl sinngemäß als etwas beschrieb, mit dem wir **zählen** und **rechnen**. Im „Rechnen“ ist bei ihm nachweislich auch das Rechnen mit Bruchzahlen eingeschlossen. Diese werden also erstmals als vollwertige Zahlen anerkannt.

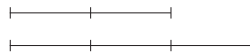
Die heutige Bruchschreibweise, bei der Zähler und Nenner durch einen Bruchstrich getrennt werden, geht auf die indische Zahlschrift zurück. Die Regeln der Bruchrechnung dürften um etwa 600 n. Chr. bereits bekannt gewesen sein, doch wurden sie noch nicht mit den heute üblichen Rechenzeichen angeschrieben.



Irrationale Zahlen



Die **Pythagoräer** untersuchten ua. Verhältnisse von Saitenlängen am Monochord und entdeckten dabei, dass die musikalischen Intervalle durch einfache Verhältnisse natürlicher Zahlen beschrieben werden können (Oktave $1 : 2$, Quinte $2 : 3$, Quarte $3 : 4$ usw.). Verhalten sich zwei Streckenlängen beispielsweise wie $2 : 3$, so bedeutet dies, dass es ein „gemeinsames Maß“ gibt, welches in der einen Strecke zweimal und in der anderen Strecke dreimal enthalten ist (siehe die Abbildung).



Die Pythagoräer nannten zwei Strecken **kommensurabel**, wenn es ein solches gemeinsames Maß gibt. Sie glaubten zunächst, dass zwei beliebige Strecken stets kommensurabel seien, dh. dass man immer ein gemeinsames Maß finden könne, auch wenn dieses sehr klein ist. Sie entdeckten aber später (möglicherweise war es **Hippasos** von Metapont), dass es inkommensurable Strecken gibt, also Strecken, für die kein gemeinsames Maß gefunden werden kann. Dies gilt etwa für die Seite und Diagonale eines Quadrats oder die Seite und Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks. Diese Erkenntnis wirkte wie ein Schock, da sie die Grenzen der griechischen Proportionslehre aufzeigte. Durch verschiedene Reparaturen (zB durch **Eudoxos**) versuchten die Griechen, ihre Proportionslehre der geänderten Situation anzupassen. Eine wirkliche Lösung war aber erst möglich, nachdem das Problem von der Geometrie losgelöst wurde und die Verhältnisse inkommensurabler Strecken durch irrationale Zahlen beschrieben wurden.

Einen wesentlichen Anstoß zur Bildung der irrationalen Zahlen dürfte die Dezimalschreibweise geliefert haben. Denn wenn man Zahlen mit endlich vielen Nachkommastellen anschreiben darf, liegt der Gedanke nahe, auch solche mit unendlich vielen Nachkommastellen zuzulassen, auch wenn die Darstellung nicht periodisch ist. Wenngleich man diese Zahlen nicht genau angeben kann, kann man sie doch mit beliebig vorgegebener Genauigkeit annähern. Wenn man aber von Annähern spricht, setzt dies voraus, dass es Zahlen gibt, denen man sich annähert. Das sind die irrationalen Zahlen.

Die Anerkennung der irrationalen Zahlen erfolgte jedoch zögernd. Lange Zeit befand man sich in einem Zwiespalt: Einerseits hatten die irrationalen Zahlen typische Eigenschaften von Zahlen (man konnte sie zB als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen), andererseits empfand man sie doch nicht als „richtige“ Zahlen. Man nannte sie daher „absurde“, „irreguläre“, „unerklärliche“ oder „taube“ Zahlen. Auch der heute gebräuchliche Ausdruck „irrational“ ist ein Rest dieses Zwiespalts. Einer der Ersten, der die irrationalen Zahlen als vollwertige Zahlen anerkannte, war **Simon Stevin** (1548–1620), ein eifriger Verfechter der damals durchaus noch nicht üblichen Dezimalschreibweise. Er erweiterte die Zahlauffassung von **Petrus Ramus** und beschrieb eine Zahl im Wesentlichen als etwas, mit dem wir „Quantitäten“ ausdrücken, dh. mit dem wir **zählen, rechnen** und **messen**. Da beispielsweise zu einer exakten Längenangabe auch irrationale Maßzahlen erforderlich sind, zählen bei ihm auch die irrationalen Zahlen zu den Zahlen. Er erkannte, dass die reellen Zahlen (also die rationalen und irrationa-



Simon Stevin
(1548–1620)



len Zahlen) die Zahlengerade lückenlos ausfüllen und kontinuierlich veränderbar sind, wenngleich er dies etwas umständlich beschreibt:

„Die Zahl ist bei der Größe so etwas wie die Feuchtigkeit beim Wasser. Denn wie diese sich durch das Ganze und in jeden Teil des Wassers erstreckt, so erstreckt sich die einer Größe zugeordnete Zahl durch die ganze Größe und in jeden Teil. Und wie einer kontinuierlichen Wassermenge eine kontinuierliche Feuchtigkeit entspricht, so entspricht einer kontinuierlichen Größe eine kontinuierliche Zahl.“

Negative Zahlen

Über den Ursprung der negativen Zahlen weiß man fast nichts. Möglicherweise stieß man auf sie bei dem Versuch, die größere Zahl von der kleineren abzuziehen. Dafür spricht, dass die negativen Zahlen bis ins 16. Jahrhundert, etwa noch bei **Michael Stifel** (ca. 1487–1567), als Differenzen natürlicher Zahlen angeschrieben wurden, zB $8 - 10$, $0 - 2$ usw. In Rechnungen wurden die negativen Zahlen bestenfalls als nützliche Zwischenglieder angesehen, aber nicht als Endresultate anerkannt.

Die Anerkennung eines negativen Resultats findet sich zum ersten Mal bei **Leonardo von Pisa** (genannt **Fibonacci**, ca. 1170–ca. 1250). In einer Aufgabe, in der nach Geldbeträgen gefragt wird, interpretierte er die positiven Lösungen als Guthaben und die negativen Lösungen als Schulden. Nach und nach verband man mit den positiven bzw. negativen Zahlen auch andere Vorstellungen, die stets gewisse Gegensätzlichkeiten aus-

drückten: über null – unter null; über dem Meeresspiegel – unter dem Meeresspiegel usw. Durch Abstraktion entwickelte sich daraus der Begriff des positiven bzw. negativen Vorzeichens. Im Grunde waren damals die negativen Zahlen nichts anderes als die positiven Zahlen, nur mit einem anderen Vorzeichen oder einer anderen Deutung versehen: -5 Gulden war dasselbe wie $+5$ Gulden, nur Schulden statt Guthaben; -7 Grad war dasselbe wie $+7$ Grad, nur unter null statt über null; -50 m war dasselbe wie $+50$ m, nur unter dem Meeresspiegel statt über dem Meeresspiegel usw. Im täglichen Leben werden die negativen Zahlen noch heute vielfach so aufgefasst.

Als eigenständige Zahlen wurden die negativen Zahlen nur sehr zögernd anerkannt. Ähnlich wie die irrationalen Zahlen nannte man sie zunächst „defekte“, „falsche“, „gedichte (= gedachte)“, „fingierte“, „ungültige“, „verneinte“ oder schließlich „negative“ Zahlen. Der Anerkennung der negativen Zahlen standen vor allem zwei Schwierigkeiten entgegen. Erstens waren die negativen Zahlen kleiner als 0, man konnte sich aber keine Zahlen vorstellen, die mit den Worten von **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) „weniger als nichts“ waren. Zweitens konnte man die Festsetzung „minus mal minus ist plus“ nicht verstehen, so lange sie inhaltlich interpretiert wurde. Warum soll das Produkt von Schulden plötzlich ein Guthaben ergeben? Der französische Romanschriftsteller **Stendhal** (1783–1842) schrieb dazu:

„Nach meinem Dafürhalten war in der Mathematik jede Heuchelei ausgeschlossen, und in meiner jugendlichen Einfalt glaubte ich, es müsste dies in allen anderen Wissenschaften, die sie, wie ich gehört hatte, anwandten, ebenso der Fall sein. Wie wurde mir zumute, als ich merkte, dass kein Mensch mir erklären konnte, wieso minus mal minus gleich plus ergibt.“

Die volle Anerkennung der negativen Zahlen gelang erst im späteren 19. Jahrhundert, als man sich von den inhaltlichen Interpretationen löste und Zahlen allein durch ihre Rechengesetze (Axiome) beschrieb. Dadurch wurde der Stevin'sche Zahlbegriff (Zahlen als Quantitäten) von einem axiomatischen Zahlbegriff abgelöst (Zahlen als durch Axiome festgelegte Objekte).



Leonardo von Pisa
(genannt **Fibonacci**,
ca. 1170–ca. 1250)



Komplexe Zahlen

Im 16. Jahrhundert tauchten Wurzeln aus negativen Zahlen auf. **Cardano** (1501–1576) stellte die Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 30 ist (vgl. Seite 232). Die Aufgabe führt auf eine quadratische Gleichung und die formale Anwendung der Lösungsformel für solche Gleichungen liefert die Ausdrücke $5 + \sqrt{-5}$ und $5 - \sqrt{-5}$. Cardano konnte diesen Ausdrücken keinen Sinn beilegen und nannte sie „sophistische“ Ausdrücke.



Gerolamo Cardano
(1501–1576)

Die obige Aufgabenstellung konnte man noch als unsinnig bezeichnen. Cardano bemerkte jedoch, dass man mit den Wurzeln aus negativen Zahlen auch ernsthaftere Probleme lösen kann. Er verwendete eine Formel zur Lösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ (siehe Seite 237). Dabei können in bestimmten Fällen während der Rechnung Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten, während sich im Endresultat durchaus reelle Lösungen der Gleichung ergeben. Ähnlich wie bei den negativen Zahlen begann man die Wurzeln aus negativen Zahlen als nützliche Zwischenglieder beim Gleichungsrechnen zu akzeptieren, nicht jedoch als Endresultate. Die Frage, ob sie Zahlen darstellen, wurde kaum gestellt.

Da man mit Wurzeln aus negativen Zahlen jedoch rechnen kann, insbesondere Gleichungen lösen und damit verschiedene Anwendungsprobleme bewältigen kann, lag eine Reparatur des bisher vertretenen Zahlbegriffs in der Luft. **Bombelli** (1526–1572) versuchte die Situation durch Einführung eines erweiterten Vorzeichenbegriffs zu retten. Er fügte den Vorzeichen „plus“ (piu) und „mi-

nus“ (meno) noch zwei weitere Vorzeichen hinzu, die in heutiger Notation $+i$ (piu di meno) und $-i$ (meno di meno) entsprechen. Für diese Vorzeichen formulierte er Vorzeichenregeln:

Piu uia piu fa piu	+ mal + gibt +
Piu uia meno fa meno	+ mal – gibt –
Piu uia piu di meno fa meno di meno	+ mal + i gibt + i
Meno uia piu di meno fa meno di meno	– mal + i gibt – i

usw.

Die große Anzahl an Vorzeichenregeln (insgesamt 16), die man sich hier merken müsste, war wahrscheinlich der Hauptgrund, warum sich dieser Vorschlag nicht durchsetzte.

Die komplexen Zahlen entsprachen nicht dem Stevinschen Zahlbegriff. Sie konnten nämlich nicht als „Quantitäten“ gedeutet werden, da es nicht gelang, für sie eine Ordnung (Kleinerrelation) zu definieren. Deshalb war nur eine bedingte Anerkennung der komplexen Zahlen in der Theorie möglich, die sich ähnlich wie bei den negativen und irrationalen Zahlen darin äußerte, dass man die komplexen Zahlen zwar als Zahlen akzeptierte, aber als „sophistische“, „unmögliche“, „falsche“, „eingebildete“, „imaginäre“ Zahlen $\text{ü} \ddot{\text{A}}$ bezeichnete.

Die fortschreitende Anerkennung der komplexen Zahlen wurde in der Folgezeit aus drei Quellen gespeist: die Möglichkeit des Rechnens, die Vereinfachung der Theorie und des Lösens algebraischer Gleichungen sowie die anschauliche Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene. Die endgültige Anerkennung der komplexen Zahlen in der allgemein vertretenen Theorie war jedoch wie bei den negativen Zahlen erst im 19. Jahrhundert möglich, nachdem der Stevinsche Zahlbegriff durch den axiomatischen Zahlbegriff abgelöst wurde. Damit war die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen vollzogen. Die Ausdrücke „sophistisch“, „unmöglich“ usw. verschwanden wieder. Das Wort „imaginär“ behielt nur mehr eine technische Bedeutung bei.

