Ich kann den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten.

c **1** Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter exakt festgelegten Bedingungen abläuft, unter diesen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist und dessen Ausgang $\omega \in \Omega$ nicht eindeutig vorhersehbar ist. Das Werfen eines Würfels ist ein Zufallsexperiment. Ein Würfel wird n mal geworfen, wobei die Augenzahl ω mit absoluter Häufigkeit $H(\omega)$ auftritt.
Vervollständige den Satz, sodass eine mathematisch richtige Aussage entsteht. Wähle dazu die richtigen Satzteile aus.

Wenn n groß ist, das heißt, wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, so nähert sich …. **I.** …. immer mehr einer Zahl …. **II.** …. .

I.
a. die absolute Häufigkeit $H_n(\omega)$
b. die relative Häufigkeit $h_n(\omega)$
c. die Wahrscheinlichkeit $P_n(\omega)$

II.
a. $P(\omega)$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.
b. $h(\omega)$, der relativen Häufigkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.
c. $\frac{h_n(\omega)}{n}$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.

c **2** Ein spezieller 6-seitiger fairer Spielwürfel hat auf vier Seiten das Symbol „θ" abgebildet und auf zwei Seiten das Symbol „∞". Dieser Würfel wird 20-mal hintereinander geworfen. Man erhält dabei 11-mal das Symbol θ und 9-mal das Symbol ∞.

a. Kreuze an, welche Zahl die Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ für das Auftreten von Symbol θ angibt.

A $P(\theta)=\frac{9}{20}$ B $P(\theta)=\frac{11}{20}$ C $P(\theta)=\frac{2}{3}$ D $P(\theta)=\frac{11}{9}$ E $P(\theta)=\frac{1}{3}$

b. Begründe deine Entscheidung aus Aufgabe **a.**, indem du erklärst, was man unter der Wahrscheinlichkeit $P(\theta)$ versteht.

c. Das Zufallsexperiment wird n-mal wiederholt, das heißt, der Würfel wird n-mal geworfen. Erkläre, welcher Zahl $P(\infty)$ sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\infty)$ annähern müssen, wenn n immer größer wird.

c **3** Bei einer Tombola gibt es insgesamt 400 Lose. Davon gewinnen 10 Lose einen Hauptpreis und 50 Lose einen Sachpreis. Die übrigen Lose sind Nieten, das heißt, man gewinnt nichts.

a. Erkläre den Begriff „Wahrscheinlichkeit" anhand des Beispiels.

b. Sigmund behauptet: „Wenn ich 40 Lose kaufe, gewinne ich mit Sicherheit einen Hauptpreis." Argumentiere, ob Sigmund mit seiner Behauptung recht hat oder nicht, und stelle gegebenenfalls richtig.

c **4** Ein fairer Würfel wird n-mal geworfen. Die Grundmenge dieses Zufallsexperiments ist $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Ein Ausgang des Zufallsexperiments ist $\omega \in \Omega$, der mit der relativen Häufigkeit $h_n(\omega)$ auftritt.

a. Kreuze die richtige Aussage an.

A Für alle Versuchsausgänge $\omega \in \Omega$ gilt $0 \le \omega \le 1$.
B Wenn n sehr groß ist, gilt $P(\omega) \approx h_n(\omega)$.
C Wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, gilt $P(\omega)=1$.
D Wenn ω ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(\omega)=0$.
E Die Wahrscheinlichkeit $h_n(\omega)=\frac{1}{6}$.

b. Stelle alle falschen Aussagen aus Aufgabe **a.** richtig.

Autorin: Bettina Ponleitner

Ich kann den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten.

A, B **5** Bei einem Fantasy-Rollenspiel gibt es einen speziellen 6-seitigen Spielwürfel, der auf vier Seiten das Symbol „θ" abgebildet hat und auf zwei Seiten das Symbol „∞". An einer bestimmten Stelle des Spiels darf man zweimal mit diesem Würfel würfeln. Würfelt man beide Male das ∞-Symbol, darf man die „Höhle des Merlin" betreten. Würfelt man aber beide Male das θ-Symbol, muss man in die „Grotte der Trolle". Würfelt man jedes Symbol genau einmal, darf man eine Aktionskarte ziehen.

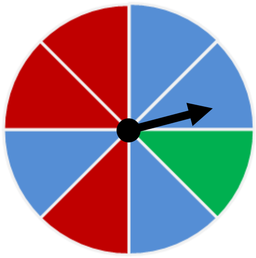
a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man die „Höhle des Merlin" betreten darf.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man in die „Grotte der Trolle" gehen muss.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Aktionskarte ziehen darf.

B, C **6** Bei der Eröffnungsfeier eines neuen Einkaufszentrums gibt es ein Glücksrad.

Feldfarbe	Aktion
grün	Gewonnen! (10€-Gutschein)
rot	Du darfst noch einmal drehen!
blau	Leider verloren ☹



a. Jemand dreht einmal am Glücksrad. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person **I.** einen 10€-Gutschein erhält, **II.** verliert, **III.** nochmals drehen darf.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man beim 3. Mal Drehen einen Gewinn erzielt.

c. Interpretiere, von welchem Ereignis E die Wahrscheinlichkeit mit $P(E) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ berechnet wird.

A, B **7** Bei einem Brettspiel wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Wenn die Augensumme 9 ergibt, darf man eine Aktionskarte ziehen, wenn die Augensumme 8 ergibt, darf man seine Spielfigur um zwei Felder vorrücken.

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Aktionskarte ziehen darf.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man die Spielfigur zwei Felder vorrücken darf.

B, C **8** In einem Kartenspiel mit 52 Karten gibt es 4 Asse. Es wird jeweils eine Karte gezogen und der Wert der Karte notiert. Anschließend wird die Karte in den Stapel zurückgelegt und die Karten werden neu gemischt.

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Mal ein Ass zu erhalten.

b. Interpretiere, von welchem Ereignis E die Wahrscheinlichkeit mit $P(E) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52}$ berechnet wird.

A, B, C **9** In einem Kartenspiel mit vier Farben (Herz, Karo, Kreuz, Pik) gibt es von jeder Farbe 13 Karten (2 bis 9, Bube, Dame, König, Ass). Bei einem Glücksspiel werden alle Karten verdeckt gemischt und anschließend eine Karte aufgedeckt. Solange die Summe aller aufgedeckten Karten kleiner als 21 ist, darf man eine neue Karte aufdecken. Erzielt man eine Kartensumme von 21, hat man das Spiel gewonnen und erhält den doppelten Einsatz. Ist die Kartensumme größer als 21, ist das Spiel verloren. Hört man auf, solange die Punktezahl kleiner als 21 ist, verbleibt der Einsatz am Spieltisch und man kann nochmals spielen.

Karte	Wert
Zahlenkarten (2 bis 10)	entspricht jeweils dem aufgedruckten Zahlenwert
Bube	1
Dame	5
König	10
Ass	11

a. Die erste Karte ist ein Ass. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit der nächsten Karte **I.** genau 21, **II.** weniger als 21, **III.** mehr als 21 Punkte erreicht.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte einen Wert von weniger als 10 Punkten hat.

Autorin: Bettina Ponleitner

Ich kann den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten.

c. Interpretiere, von welchem Ereignis E die Wahrscheinlichkeit mit $P(E) = \frac{8}{52} \cdot \frac{4}{51}$ berechnet wird. Kreuze das entsprechende Ereignis an.

A Die Summe der beiden aufgedeckten Karten ist 21.

B Der Spieler bzw. die Spielerin gewinnt den doppelten Einsatz.

C Beim 1. Zug wird ein 10-er oder ein König, beim 2. Zug ein Ass aufgedeckt.

D Es werden zwei Karten aufgedeckt.

E Der Spieler bzw. die Spielerin verliert den Einsatz.

Lösungen zu:
Ich kann den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten.

1 Wenn n groß ist, das heißt, wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, so nähert sich **I. b.** die relative Häufigkeit $h_n(\omega)$ immer mehr einer Zahl **II. a.** $P(\omega)$, der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl ω.

2 **a.** C $P(\theta)=\frac{2}{3}$

b. Wenn man mit diesem Spezial-Würfel würfelt, erscheint immer eines der beiden Symbole auf der oben liegenden Seite. Würfelt man n-mal, dann ist die relative Häufigkeit für das Symbol s (entweder $s=\infty$ oder $s=\theta$) $h_n(s)=\frac{\text{Anzahl der Würfe mit Ergebnis s}}{n}$. (Zum Beispiel erhält man mit den Zahlen aus der Angabe $h_{20}(\theta)=\frac{11}{20}$ und $h_{20}(\infty)=\frac{9}{20}$.) Wenn man den Würfel immer öfter wirft, nähert sich die relative Häufigkeit $h_n(\theta)$ immer mehr dem Wert $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ an. Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Symbol θ gewürfelt wird.

c. Wenn n immer größer wird, müssen sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\infty)$ immer mehr der Zahl $P(\infty)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ annähern.

3 **a.** Wenn man ein Los kauft und „blind" aus dem Topf mit Losen zieht, erhält man entweder ein Los, das einen Haupttreffer (H), einen Sachpreis (S) oder gar nichts (N) gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ für $\omega\in\Omega=\{H,S,L\}$ gibt an, ob man eher damit rechnen kann, einen Haupttreffer, einen Sachpreis oder gar nichts zu gewinnen. Da es insgesamt 10 Hauptgewinn-Lose gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass man eines davon zieht, $P(H)=\frac{10}{400}=\frac{1}{40}$. Die Wahrscheinlichkeit für ein Los, das einen Sachpreis gewinnt, ist daher $P(S)=\frac{50}{400}=\frac{1}{8}$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Niete ist $P(H)=\frac{340}{400}=\frac{17}{20}$ (Da sich 400-10-50=360 Nieten im Los-Topf befinden.).

Wenn man also sehr viele Lose kauft, so werden ungefähr $\frac{1}{40}$ dieser Lose Gewinnlose für einen Hauptgewinn sein, $\frac{1}{8}$ dieser Lose werden einen Sachpreis gewinnen und $\frac{17}{20}$ dieser Lose (also der größte Teil der Lose) werden Nieten sein.

b. Sigmund hat nicht recht mit seiner Behauptung. Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Los für einen Hauptgewinn zieht, beträgt $\frac{1}{40}$. Das heißt, wenn man sehr viele Lose kauft, werden etwa $\frac{1}{40}$ dieser Lose Gewinnlose für einen Hauptgewinn sein. Man kann aber nicht mit Sicherheit sagen, dass eines von Sigmunds Losen einen Hauptgewinn erzielt.

4 **a.** richtige Aussage: B [Wenn man das Zufallsexperiment immer öfter wiederholt, nähern sich die relativen Häufigkeiten $h_n(\omega)$ immer mehr der Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ an.]

b. Die richtiggestellten Aussagen lauten:

A Für alle Versuchsausgänge $\omega\in\Omega$ gilt $0\le P(\omega)\le 1$.

C *entweder*: Wenn das Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird, gilt $P(\omega)\approx h_n(\omega)$.

oder: Wenn ω ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(\omega)=1$.

D *entweder:* Wenn E ein „sicheres Ereignis" ist, dann gilt $P(E)=1$.

oder: Wenn E ein „unmögliches Ereignis" ist, dann gilt $P(E)=0$.

E Die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)=\frac{1}{6}$.

Autorin: Bettina Ponleitner

Lösungen zu:
Ich kann den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten.

5 a. E = „Betritt die Höhle des Merlin“, $P(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. $[P(\infty)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}]$

b. E = „Gehe in die Grotte der Trolle“, $P(E)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. $[P(\theta)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}]$

c. E = „Ziehe eine Aktionskarte“, $P(E)=\frac{4}{9}$. [Man kann diese Wahrscheinlichkeit auf zwei Arten berechnen:

1. Art: Man addiert die Wahrscheinlichkeiten der beiden günstigen Ereignisse E_1 = „1. Wurf = θ, 2. Wurf = ∞" und E_2 = „1. Wurf = ∞, 2. Wurf = θ" und erhält $P(E)=P(E_1)+P(E_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

2. Art: Man verwendet die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses E^c und erhält $P(E)=1-P(E^c)=1-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9}$.]

6 a. I. E = „Gewinn: 10€-Gutschein“, $P(E)=\frac{1}{8}$; II. E = „Leider verloren“, $P(E)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$;

III. E = „Nochmals drehen“, $P(E)=\frac{3}{8}$

b. E = „Gewinn beim 3. Mal Drehen“, $P(E)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{512}\approx 0{,}018$ [Beim 1. und 2. Mal Drehen stoppt der Zeiger auf einem roten Feld, beim 3. Mal Drehen wird ein erzielt.]

c. E = „Man darf ein 2. Mal Drehen und verliert beim 2. Mal Drehen.“

7 a. $P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ [Es gibt 36 mögliche Ausgänge $\{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$. Davon sind 4 Ausgänge günstig, nämlich $\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$.]

b. $P(E)=\frac{5}{36}$ [Es gibt 36 mögliche Ausgänge $\{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$. Davon sind 5 Ausgänge günstig, nämlich $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.]

8 a. $P(E)=\frac{4}{52}$ [Es gibt 52 mögliche Ausgänge. Davon sind 4 Ausgänge günstig, nämlich genau die 4 Ass-Karten.]

b. z.B. E = „Die ersten beiden gezogen Karten sind Asse, die 3. Karte ist kein Ass.“

9 a. Die erste Karte ist ein As. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit der nächsten Karte I.
$P(E)=\frac{8}{51}$ [Nachdem bereits eine Karte aufgedeckt ist, gibt es noch 51 mögliche Ausgänge. Davon sind 8 Ausgänge günstig, nämlich $\{\text{König}, 10\}$ von jeder Farbe.]

II. $P(E)=\frac{40}{51}$ [Nachdem bereits eine Karte aufgedeckt ist, gibt es noch 51 mögliche Ausgänge. Davon sind 40 Ausgänge günstig, nämlich $\{2,3,\dots,8,9,\text{Bube},\text{Dame}\}$ von jeder Farbe.]

III. $P(E)=\frac{3}{51}$ [Nachdem bereits eine Karte aufgedeckt ist, gibt es noch 51 mögliche Ausgänge. Davon sind 3 Ausgänge günstig, nämlich genau die drei noch im Stapel vorhandenen Asse.]

b. $P(E)=\frac{40}{52}$ [Nachdem noch keine Karte aufgedeckt ist, gibt es insgesamt 52 mögliche Ausgänge. Davon sind 40 Ausgänge günstig, nämlich $\{2,3,\dots,8,9,\text{Bube},\text{Dame}\}$ von jeder Farbe.]

c. ☐ Beim 1. Zug wird ein 10-er oder ein König, beim 2. Zug ein As aufgedeckt.