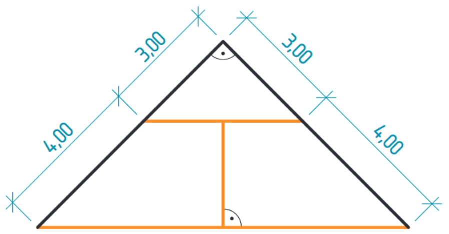
Herausfordernde Aufgaben zu Satz des Pythagoras bei allgemeinen Dreiecken, S. 189

1. In einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis c, Höhe h_c und Schenkeln $a = b$ sind einige der Größen bekannt. Berechne die fehlende Größe. Berechne weiters auch Umfang und Fläche.

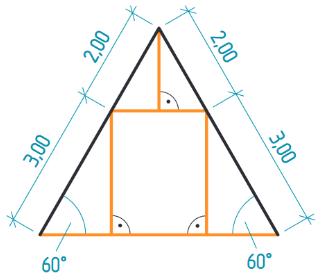
a. $c = 10\ m, h_c = 12\ m$
b. $c = 72\ mm, a = 85\ mm$
c. $a = 60\ cm, h_c = 11\ cm$

2. Berechne die Gesamtlänge der orange eingezeichneten Balken in den dargestellten Dachkonstruktionen! (Maße in Meter)

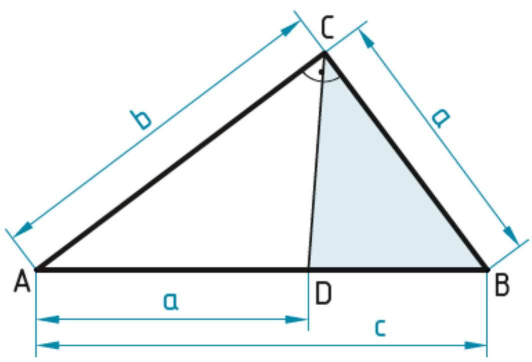
a)



b)



3. Wie viel Prozent der Fläche des nebenstehend abgebildeten rechtwinkligen Dreiecks ABC mit b = 52 cm und c = 65 cm sind blau?
Hinweis: $\angle BAC \neq 90°$

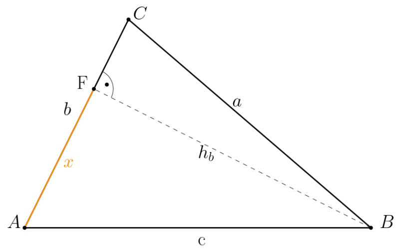


4. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 13\ cm, b = 14\ cm, c = 15\ cm$ und den Umkreisradius $r = 8{,}125\ cm$.
Welche der drei Seiten hat den kleinsten Abstand zum Umkreismittelpunkt? Rate zuerst, dann berechne die drei Abstände.
Hinweis: Für die Berechnung der Abstände kannst du die Formel für den Abstand einer Sehne zum Kreismittelpunkt verwenden (Aufgabe 811). Jede Dreiecksseite ist eine Sehne im Umkreis.

5. Ist c die längste Seite eines Dreiecks, so kann anhand der Beziehungen $a^2 + b^2 > c^2, a^2 + b^2 = c^2$ oder $a^2 + b^2 < c^2$ erkannt werden, ob ein spitzwinkliges, rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck vorliegt.

a. Wir überlegen: Ist c die längste Seite eines spitzwinkligen Dreiecks, dann ist $a^2 + b^2 > c^2$.

Hinweis: Betrachte dazu die Höhe h_b. Sei F der Fußpunkt dieser Höhe und x die Strecke FA (siehe Skizze).



Dann ist AFB ein rechtwinkliges Dreieck, also gilt $x^2 + h_b^2 = c^2$. Begründe in deinen Worten, warum $b > x$ und $a > h_b$ gelten muss (und somit auch $b^2 > x^2$ und $a^2 > h_b^2$). Folgere daraus $a^2 + b^2 > c^2$.

b. Untersuche damit, ob folgende Dreiecke spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig sind:

1) $a = 6\ cm, b = 7\ cm, c = 9\ cm$
2) $a = 5\ m, b = 11\ m, c = 13\ m$
3) $a = 14\ cm, b = 19\ cm, c = 21\ cm$
4) $a = 20\ mm, b = 21\ mm, c = 29\ mm$

Lösungen

1. a. $a = 13\ m, A = 60\ m^2, u = 36\ m$
b. $h_c = 77\ mm, A = 2772\ mm^2, u = 242\ m$
c. $c \approx 118\ cm, A \approx 648{,}8\ cm^2, u \approx 238\ cm$

2. a. $16{,}97\ m$ b. $13{,}93\ m$

3. 40%

4. Abstand von a: $4{,}875\ cm$, Abstand von b: $4{,}125\ cm$, Abstand von c: $3{,}125\ cm$

5. a. Im spitzwinkligen Dreieck liegt der Höhenfußpunkt immer innerhalb der Seite, also ist die Länge des Höhenabschnitts x kleiner als b, also ist $b > x$.
Weil a die Hypotenuse und h_b eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck CFB ist, gilt $a > h_b$.
Es folgt: $a^2 + b^2 > h_b^2 + x^2 = c^2$.
b. **1)** spitzwinklig (85>81) **2)** stumpfwinklig (146<169)
3) spitzwinklig (557<441) **4)** rechtwinklig (841=841)