Lösung Aufgabe 254

a)
Mit Hilfe eines rechtwinkeligen Dreiecks in der oberen Skizze findet man gemäß des Satzes von Pythagoras den Zusammenhang $k^2 = h_s^2 + c^2 \Rightarrow h_s^2 = k^2 - c^2$.
Mit dem rechtwinkeligen Dreieck in der unteren Skizze erhält man $h_s^2 = h^2 + c^2$
$\Rightarrow h^2 = h_s^2 - c^2$.
Setzt man h_s von der oberen Gleichung in die untere ein, ergibt sich
$h^2 = k^2 - c^2 - c^2 = k^2 - 2c^2 \Rightarrow h = \sqrt{k^2 - 2c^2}$.

In einem Pyramidenstumpf mit $s_1 = 28$ m und $s_2 = 4$ m ist $c = \frac{28-4}{2} = 12$ m.
Einsetzen in die obige Formel ergibt für $h = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 12^2} = \sqrt{-63}$.
Ein quadratischer Pyramidenstumpf mit den angegebenen Maßen existiert nicht und kann daher auch nicht gebaut werden.

b)
Der Flächeninhalt A der Querschnittsfläche des Pyramidestumpfs nimmt mit der Höhe h ab. Er lässt sich in jeder Höhe durch Quadrieren der jeweiligen Seitenlänge a(h) bestimmen (die Querschnittsflächen sind Quadrate).
Die Seitenlänge dieser Quadrate sinkt auf einer Höhe von 20 m von anfangs 15 m gleichmäßig auf 8 m, also insgesamt um 7 m. Pro Meter Höhe sinkt die Seitenlänge daher um $\frac{7}{20}$ Meter. Die Seitenlänge a(h) beträgt in der Höhe h also $15 - \frac{7}{20} \cdot h$ und der Flächeninhalt der Querschnittsfläche $A(h) = (15 - \frac{7}{20} \cdot h)^2$.

Das angegebene Integral hat die Bedeutung einer Multiplikation des Inhalts der Querschnittsfläche und der Höhe. Diese Bedeutung ist ein Volumen.
Der Ausdruck bedeutet das Volumen des Pyramidenstumpfs.

c)
Aussage A:
Die Steigung der Sekante im Zeitintervall [10; 20] ist kleiner als jene im Zeitintervall [40; 50]. Die Aussage trifft daher nicht zu.

Aussage B:
Diese Aussage trifft zu, da S(30) = 800 die Hälfte von S(60) = 1600 ist.

Aussage C:
Diese Aussage trifft zu, da die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle 10 etwa so groß ist wie an der Stelle 50.

Aussage D:
Im Mittel fließen rund $\frac{1600}{60}$ = 26,666 m³ Sand pro Minute in den Pyramidenstumpf. Die Aussage trifft also zu.

Aussage E:
Da die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion S zum Zeitpunkt 30 den Wert null hat, ist die momentane Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt null. Man kann also interpretieren, dass zu diesem Zeitpunkt gerade kein Sand in den Pyramidenstumpf fließt. Die Aussage trifft zu.

Lösung: B, C, D, E