Lösungswege 7 – Online   Vertiefung

Thema: Multiplikation und Division komplexer Zahlen in Polardarstellung		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad:	Klasse:

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1\cdot(\cos(\varphi_1) + i\cdot\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2\cdot(\cos(\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_2))$ in Polardarstellung.

<u>Multiplikation</u>:

$z_1 \cdot z_2 \quad = r_1\cdot(\cos(\varphi_1) + i\cdot\sin(\varphi_1)) \cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_2)) =$

$\quad = r_1 \cdot r_2 \cdot[\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + i\cdot(\sin(\varphi_1)\cdot \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2))] =$

Anwenden der **Additionstheoreme**: $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)$

$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)$

$\quad = r_1 \cdot r_2 \cdot[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

Regel: Die Beträge der komplexen Zahlen werden multipliziert und die Argumente addiert.

Anwenden der binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$, um i aus dem Nenner zu eliminieren.

<u>Division</u>:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))}{r_2\cdot(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2))} = \frac{r_1\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot(\cos(\varphi_2)-i\cdot\sin(\varphi_2))}{r_2\cdot(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2))\cdot(\cos(\varphi_2)-i\cdot\sin(\varphi_2))} = \frac{r_1\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot(\cos(\varphi_2)-i\cdot\sin(\varphi_2))}{r_2\cdot(\cos^2(\varphi_2)-i^2\cdot\sin^2(\varphi_2))} =$$

$$= \frac{r_1\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot(\cos(\varphi_2)-i\cdot\sin(\varphi_2))}{r_2\cdot(\cos^2(\varphi_2)+\sin^2(\varphi_2))} = \frac{r_1\cdot[\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+i\cdot(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)-\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2))]}{r_2} =$$

Trigonometriachen Grundbeziehung: $\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2) = 1$

Additionstheoreme: $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)$

$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin(\varphi_1)\cdot \cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\cdot \sin(\varphi_2)$

$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Regel: Die Beträge der komplexen Zahlen werden dividiert und die Argumente subtrahiert.